This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

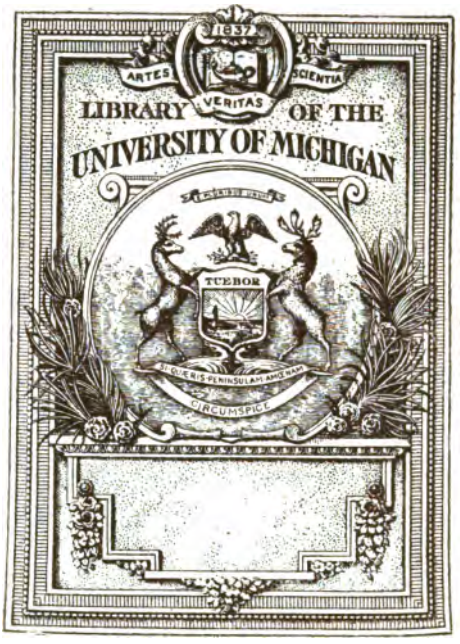
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

.80. 22/9



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

EX. N.

Nr. 1. —.80.
» 2. Ver-
und
» 7. —.80.
ausg.
» 10. röme.
» 11. n üb.
2. Tag
v. A.
» 12. bert.
» 13. mus.
xtfig.
» 20. von
» 21. ktro-
wald.
» 23. —— —— .42 S.)
ℳ 1.50.

» 24. **Galileo Galilei,** Unterredungen u. mathem. Demonstrationen über 2 neue Wissenszweige etc. (1638.) 3. u. 4. Tag mit 90 Fig. im Text. Aus dem Italien. u. Latein. übers. u. herausg. von A. von Oettingen. (141 S.) ℳ 2.—.

» 25. —— —— (1638.) Anhang zum 3. u. 4. Tag, 5. u. 6. Tag, mit 23 Fig. im Text. Aus dem Italien. u. Latein. übers. u. herausg. von A. von Oettingen. (66 S.) ℳ 1.20.

» 31. **Lambert's** Photometrie. (Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae). (1760.) Deutsch herausg. v. E. Anding. Erstes Heft: Theil I und II. Mit 35 Fig. im Text. (135 S.) ℳ 2.—.

» 32. —— —— Zweites Heft: Theil III, IV und V. Mit 32 Figuren im Text. (112 S.) ℳ 1.60.

» 33. —— —— Drittes Heft: Theil VI und VII. — Anmerkungen. Mit 8 Figuren im Text. (172 S.) ℳ 2.50.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

1318
Alexander Ziwet
QC
425
.N49

Theorie

der

DOPPELTEN STRAHLENBRECHUNG,

abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik

von

F. E. NEUMANN
in Königsberg i. Pr.

(1832.)

Herausgegeben

von

A. Wangerin.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1896.

[418]

Theorie der doppelten Strahlenbrechung,

abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik

von

F. E. Neumann

in Königsberg i. Pr.

[*Poggendorff*'s Annalen der Physik u. Chemie XXV, p. 418—454, Leipzig 1832.]

---

§ 1.

Fresnel hat in seiner Theorie der Diffraction des Lichtes (*Mémoires de l'Académie, An.* 1821 *et* 1822) auf dem Wege des Experiments bewiesen, dass die Bewegung, welche ein Theilchen eines Mediums, in welchem vibrirende Bewegungen stattfinden, zur Zeit t erhält, die Resultante aller derjenigen Bewegungen ist, welche nach diesem Theilchen geschickt werden von jedem zur Zeit $t - \alpha$ bewegten Theilchen des Mediums. Es ist dies das Princip von *Huygens*[1] — wodurch dieser zuerst die Refraction und Reflexion des Lichtes in der Undulationstheorie erklärte, — oder richtiger, wenn man will, das Princip der Coexistenz kleiner Bewegungen, angewandt auf die Wellenbewegung in einem elastischen Medium. In der Theorie der Diffraction hat *Fresnel* zugleich gelehrt, die Resultante aller der Bewegungen zu finden, die nach einem Theilchen eines elastischen Mediums von einer beliebigen Anzahl und auf eine beliebige Weise gelegenen [419] Erschütterungspunkten gleicher Schwingungsdauer, d. h. von Theilchen, welche nach dem Gesetz der Pendelbewegungen um ihre Gleichgewichtslage mit gleicher Schwingungsdauer oscilliren, gesandt werden; diese Untersuchung bildet den wesentlichsten Inhalt der Theorie der Interferenz.

1*

417151

Fresnel hat ferner bewiesen, oder aus dem von ihm Bewiesenen folgt unmittelbar folgendes Theorem:

Wenn die verschiedenen Erschütterungspunkte, von welchen aus die vibrirenden Bewegungen in dem Medium sich fortpflanzen, auf einer stetigen Fläche liegen, so ist diejenige Fläche, auf welcher die gleichzeitig bewegten Theilchen des Mediums liegen (d. i. die Wellenfläche), die Enveloppe aller derjenigen Flächen, auf welchen die zu derselben Zeit bewegten Theilchen liegen würden, wenn jeder der Erschütterungspunkte nur einzeln vorhanden gewesen wäre, d. h. die resultirende Wellenfläche ist die Enveloppe der Wellenflächen jedes einzelnen Erschütterungspunktes. Dieses Theorem setzt eine gleiche Schwingungsdauer für alle Erschütterungspunkte voraus, es gilt aber, sei es, dass die gegebenen Erschütterungspunkte ihre Schwingungen gleichzeitig anfangen, oder dass der Anfang der Schwingung in jedem Erschütterungspunkte irgend ein stetiges Gesetz der Zeit befolgt; im letzteren Fall kann man statt der gegebenen Fläche, worauf die nicht in derselben Phase befindlichen Erschütterungspunkte liegen, immer eine andere construiren, worauf man sie sich als im Zustande der gleichzeitig anfangenden Schwingung liegend denken kann.

Mittelst dieses Theorems ist die allgemeine Untersuchung über die Wellenbewegung in einem elastischen Medium zurückgeführt auf die Untersuchung des sehr einfachen Falls der Wellenbewegung, die von einem Erschütterungspunkte aus in dem Medium erregt wird. Die allgemeine Theorie der Refraction und Reflexion des Lichtes, welche in Beziehung auf die Richtung des gebrochenen [420] und reflectirten Strahls allein von der Lage der Wellenfläche in jedem der beiden an einander grenzenden Medien abhängt, ist mittelst dieses Theorems reducirt auf die Untersuchung der Wellenfläche von *einem* Erschütterungspunkte aus in jedem der beiden Medien.

Die Wellenfläche, hervorgebracht von einem Erschütterungspunkte, soll, dem Gebrauch gemäss, schlechthin die Wellenfläche heissen. Die Wellenfläche in nicht krystallinischen homogenen Medien ist eine Kugelfläche, d. h. jeder Impuls, der dem Medium von dem Erschütterungspunkte mitgetheilt wird, pflanzt sich nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fort; diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist in den Krystallmedien nach den verschiedenen Richtungen ver-

schieden — und daher kann die Wellenfläche hier nicht mehr eine Kugelfläche sein.

Diese Form der Wellenfläche ist es, zufolge des Gesagten, welche aus den Gleichungen der Mechanik für die vibrirenden Bewegungen in elastischen krystallinischen Medien gesucht werden muss, wenn das Problem der Refraction und Reflexion des Lichtes gelöst werden soll. Aber das Problem der Refraction und Reflexion, auf diese sehr einfache Frage nach der Gestalt der Wellenfläche reducirt, bietet für die Analysis noch grosse Schwierigkeit, weil die Beantwortung dieser Frage von Differential-Gleichungen mit vier unabhängigen Veränderlichen abhängt.

Eine sehr scharfsinnige geometrische Bemerkung von *Fresnel* in seiner Theorie der doppelten Strahlenbrechung vermindert indess diese Schwierigkeit auf das Aeusserste; dieser zufolge braucht man nur die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zu kennen von ebenen unbegrenzten Wellenflächen in den verschiedenen Lagen, um daraus mittelst der Theorie der Enveloppen die Gestalt der Wellenfläche herzuleiten. Wenn alle Theile, welche auf einer unbegrenzten Ebene liegen, gleichzeitig ihre Schwingungen anfangen und beenden, in derselben Richtung [421] und mit derselben Geschwindigkeit diese ausführen, so ist die Bewegung, ihrer Richtung und Intensität nach, welche irgend ein Theilchen des unbegrenzten Mediums erhält, offenbar nur eine Function der Entfernung dieses Theilchens von der Ebene, auf welcher die Erschütterungspunkte liegen, und von der Zeit, oder, um dasselbe anders auszudrücken, die von den auf der Ebene liegenden Erschütterungspunkten resultirende Wellenfläche ist wiederum eine Ebene. Diese Ebene ist aber eine Enveloppe aller der Wellenflächen, die von jedem der auf der gegebenen Ebene liegenden Erschütterungspunkte aus sich gebildet haben würden, wenn er allein vorhanden gewesen wäre — sie ist also die Tangentialebene aller dieser Wellenflächen. — Dieser Satz ist wahr, welches auch die Lage der Ebene der Erschütterungspunkte im Medium sei. Denkt man sich diese Ebene um denselben Punkt A in beliebige Lagen gedreht — die jedesmal resultirende Wellenfläche sämmtlicher Erschütterungspunkte ist nothwendig immer die Tangentialebene an der Wellenfläche des Erschütterungspunktes A, der allen diesen Erschütterungsebenen gemeinschaftlich ist. Es hat keine Schwierigkeiten, aus den bekannten Lagen der Tangentialebenen

einer Fläche diese selbst zu finden. Das Problem der Wellenfläche um einen Erschütterungspunkt reducirt sich also auf das Problem der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von ebenen unbegrenzten Wellenflächen, die eine beliebige Lage haben. Dies ist die einfachste Frage für die analytische Behandlung der Gleichungen, welche die Theorie der vibrirenden Bewegungen in einem elastischen Medium enthalten, weil in diesem Falle die Differential-Gleichungen, von welchen die Beantwortung der Frage abhängt, nur zwei unabhängige Veränderliche enthalten.

§ 2.

Feste Körper unterscheiden sich von flüssigen und gasförmigen Medien in Hinsicht der inneren Beweglichkeit [422] und Verschiebbarkeit ihrer Theilchen erst dann, wenn die Bewegung oder Verschiebung ihrer Theilchen so gross ist, dass eine neue Gleichgewichtslage eintritt; so lange die Verschiebungen kleiner sind als die Sphäre des stabilen Gleichgewichts, fällt der Unterschied zwischen festen, flüssigen und gasförmigen weg. Für diese Arten von Bewegungen gelten also dieselben Gleichungen, welches auch der Cohäsionszustand des Mediums ist. Es ist mehr als wahrscheinlich, dass zu dieser Art innerer Bewegungen diejenigen gerechnet werden müssen, worin, nach der Undulationstheorie, das Licht besteht. Für die Lichtundulation ist demnach ein Unterschied der Cohäsionszustände nicht vorhanden, wie dies z. B. für die Schallschwingungen der Fall ist, sondern es gelten für jene Undulationen nur die Gleichungen, welche sich auf die innere vibrirende Bewegung eines festen Mediums beziehen, da diejenigen für vibrirende Bewegungen in flüssigen Medien, die hydrodynamischen Gleichungen, wesentlich die Verrückung der vibrirenden Theilchen grösser als die Sphäre des stabilen Gleichgewichts voraussetzen. (Cf. *Fresnel*, *Ann. d. Ch. T. XVII.*)

Navier (*Mém. de l'Acad.*, *Ann.* 1824) hat zuerst die Gleichungen für die kleinen Bewegungen in festen elastischen Medien aufgestellt; zum Grunde liegt diesen Gleichungen die Voraussetzung, dass die durch irgend eine Verrückung der Theile des Mediums hervorgerufenen elastischen Kräfte, durch welche das verrückte Theilchen in seine Gleichgewichtslage zurückgezogen wird, resultiren von den anziehenden und abstossenden Kräften der umgebenden Theilchen. Die Wirkung

jedes dieser umgebenden Theilchen auf das verrückte ist proportional der Grösse, um welche sich ihre Entfernung verändert hat, und proportional einer Function ihrer Entfernung selbst, von der Beschaffenheit, dass sie gleich Null wird, wenn diese Entfernung einen irgend merklichen Werth erhält; wenn $f(\varrho)$ eine solche Function der Entfernung ϱ zweier Theilchen [423] vorstellt, $\Delta\varrho$ die Veränderung dieser Entfernung, so ist $\Delta\varrho f(\varrho)$ die Wirkung, welche diese zwei Theilchen auf einander ausüben. Diese Voraussetzung, worauf die Gleichungen von *Navier* beruhen, gilt nur bei unkrystallinischen Medien; bei krystallinischen Medien muss man noch eine neue Hypothese hinzufügen, nämlich, dass die gegenseitige Wirkung zweier Theilchen zugleich eine Function ist der Winkel, die die Richtung der Entfernung mit gewissen in der krystallinischen Structur gegebenen Linien bildet. Es sei F diese Function, so ist also die gegenseitige Wirkung zweier Theilchen $F \cdot f(\varrho)\Delta\varrho$.

Alle krystallinische Structur, ausgenommen diejenige der hemiëdrischen Gestalten, ist von der Art, dass das Medium durch drei auf einander senkrechte Ebenen in jedem Punkte in acht gleiche und in Beziehung auf jede der Ebenen symmetrisch gelegene Theile getheilt wird. F ist eine Function der Winkel, welche die Richtung der Entfernung der beiden Theilchen, welche auf einander wirken, mit den Durchschnitten der drei senkrechten Ebenen bildet; diese Winkel seien a, b, c. Die Function F muss der Art sein, dass ihr Werth ungeändert bleibt, wenn diese Winkel sich in $180^\circ \pm a$, $180^\circ \pm b$, $180^\circ \pm c$ verwandeln, sie muss also eine Function der geraden Potenzen der Sinus oder Cosinus dieser Winkel sein. Dies ist Alles, was man in Beziehung auf diese Function aus dem allgemeinen Begriff der krystallinischen Structur ableiten kann. Wie sich diese Function für die einzelnen Krystallabtheilungen specificirt, wird weiter unten bemerkt werden.

Mit Hülfe dieser neuen Hypothese für krystallinische Medien erhält man auf demselben Wege, auf welchem *Navier* die Gleichungen für nicht krystallinische Medien erhalten hat, die folgenden Gleichungen, worin die Theorie der vibrirenden Bewegungen in krystallinischen Medien enthalten ist[2]).

Es seien die Coordinaten-Axen parallel den Durchschnitten [424] der drei erwähnten senkrechten Ebenen in jedem Krystall-Medium; es seien x, y, z die Coordinaten irgend eines Theilchens des Mediums in seinem natürlichen, ruhigen Zustand;

$x+u$, $y+v$, $z+w$ seien seine Coordinaten in dem verrückten Zustand, wo u, v, w, welche die Verrückung parallel den Coordinaten-Axen darstellen, Functionen von x, y, z sind. Es bedeutet t die Zeit und E die Dichtigkeit des Mediums, alsdann gilt für jeden Punkt im Inneren, wenn keine beschleunigenden Kräfte auf ihn wirken:

$$
\begin{aligned}
E\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{,,}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
&\quad + 2A_{,,}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + 2A\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}, \\
E\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= A_{,,}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{,}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
&\quad + 2A_{,,}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2A_{,}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}, \\
E\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{,}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
&\quad + 2A\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} + 2A_{,}\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}.
\end{aligned}
\qquad \text{(I)}
$$

Wenn das Medium, in welchem die Bewegungen stattfinden, ein begrenztes ist, so giebt es noch Gleichungen, welchen die Functionen u, v, w an der Grenze des Mediums genügen müssen — die ich unterlasse anzugeben, da sie nicht gebraucht werden zu dem vorgesetzten Zweck, nämlich die Gesetze der Fortpflanzung der vibrirenden Bewegung in einem unbegrenzten Medium aufzufinden.

Die sechs Grössen A, $A_{,}$, $A_{,,}$, B, C, D, sind Constante und von der Natur des Mediums abhängig. Wie diese durch Compression der krystallinischen Substanz in verschiedenen Richtungen und die dadurch entstehenden Veränderungen in den Neigungen der Structur-Ebenen (Blätterdurchgänge etc.), oder künstlich geschnittenen Ebenen [425] können bestimmt werden[3]), soll in einem andern Aufsatz gezeigt werden*). — Hier ist

*) Es ist nicht meine Meinung, dass die auf diese Weise gefundenen numerischen Werthe dieser Constanten, welche zusammenfallen mit denjenigen, welche sich aus den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Schallwellen ableiten lassen, identisch sind mit denjenigen, welche aus den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Lichtwellen abgeleitet werden — wohl aber ist meine Meinung,

es aber nöthig, die theoretische Bedeutung dieser Constanten näher anzugeben, um daraus ihre relativen Werthe für die einzelnen Abtheilungen der krystallinischen Substanzen herzuleiten. Es bedeute dm das Differential der Oberfläche einer Kugel, die um einen Punkt des Mediums mit dem Halbmesser 1 beschrieben ist; a, b, c seien die Winkel, die irgend ein Radius dieser Kugel mit den drei Coordinaten-Axen bildet, F habe die oben angegebene Bedeutung; dann ist:

$$\begin{aligned} A &= p\int dm F\cos^2 a\cos^2 c, & B &= p\int dm F\cos^4 c, \\ A_, &= p\int dm F\cos^2 b\cos^2 c, & C &= p\int dm F\cos^4 b, \\ A_{,,} &= p\int dm F\cos^2 a\cos^2 b, & D &= p\int dm F\cos^4 a, \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

wo p eine von der Natur des Mediums unabhängige, allein von der Natur der oben erwähnten Function $f(\varrho)$ abhängige Grösse ist. Die Integration ist in Beziehung auf die ganze Kugelfläche auszuführen.

Aus diesen Werthen der Constanten ergiebt sich:

1) Für nicht krystallinische Medien, wo F constant ist, wenn $\frac{4}{15}pF\pi = L$ gesetzt wird:

$$A = A_, = A_{,,} = \tfrac{1}{3}B = \tfrac{1}{3}C = \tfrac{1}{3}D = L,$$

und die Gleichungen (I) reduciren sich auf die *Navier*'schen Gleichungen.

2) Für krystallinische Substanzen vom regulären System ist F dieselbe Function von a, als von b und von c; daher:

$$A = A_, = A_{,,} \text{ und } B = C = D.$$

[426] 3) Für die Abtheilung der viergliedrigen Systeme ist F dieselbe Function von a und b; daher:

$$A = A_, \text{ und } C = D.$$

4) In den krystallinischen Medien, deren Krystallformen zur Abtheilung der sechsgliedrigen Systeme gehören, sind es drei in einer Ebene liegende, sich unter 60° schneidende Linien, und eine vierte, gegen diese senkrechte Linie, auf welche die Symmetrie der Structur sich bezieht. F ist hier also näher bestimmt als eine gleiche Function der Winkel, welche

---

dass zwischen den Werthen dieser Constanten, die auf diesen zweierlei Wegen erhalten werden, ein Zusammenhang stattfindet, wie er in den Erscheinungen der comprimirten unkrystallinischen durchsichtigen Substanzen angedeutet ist.

eine beliebige Richtung mit den drei in einer Ebene liegenden Axen: α, $\alpha_,$, $\alpha_{,,}$ bildet. Unser rechtwinkliges Coordinaten-System denken wir uns so gelegt, dass z und x zusammenfallen mit γ (d. i. die vierte, auf jenen drei senkrecht stehende Dimension) und α, so dass y also den Winkel zwischen $\alpha_,$ und $\alpha_{,,}$ halbirt; die Winkel, welche irgend eine Richtung mit den Axen α, $\alpha_,$, $\alpha_{,,}$ bildet, seien a, $a_,$, $a_{,,}$, und mit γ oder z bilde sie den Winkel c. Die beiden Winkel a und c sind dieselben, welche in den Ausdrücken (II) der Constanten vorkommen; der dort gebrauchte Winkel b aber muss durch a und $a_,$ bestimmt werden; es ist[4]):

$$\sqrt{3}\cos b = \cos a_, + \cos a_{,,},$$

$$\cos a_{,,} - \cos a_, + \cos a = 0,$$

und daher

$$\cos^2 b = \frac{2\cos^2 a_{,,} + 2\cos^2 a_, - \cos^2 a}{3}.$$

Da nun F eine gleiche Function von a, $a_,$ und $a_{,,}$ ist, so erhält man, wenn in (II) statt $\cos^2 b$ sein Werth gesetzt wird:

$$A_, = A, \quad C = D,$$

woraus ersichtlich wird, dass in der Fortpflanzung der vibrirenden Bewegungen in krystallinischen Substanzen von den sechsgliedrigen und viergliedrigen Systemen kein Unterschied stattfindet.

Die nähere Beschaffenheit der Function F in den hemiëdrischen Gestalten, namentlich in den merkwürdigen hemiëdrischen Gestalten des Quarzes, soll an einem [427] anderen Orte untersucht werden; ich bemerke hier nur, dass für Medien solcher hemiëdrischen Gestalten gar nicht mehr die Gleichungen (I) anwendbar sind, weil in Beziehung auf diese Medien die diesen Gleichungen zum Grund gelegte Supposition, nämlich die der symmetrischen Theilbarkeit des Mediums durch drei auf einander senkrechte Ebenen, nicht mehr gilt.

§ 3.

Die Gleichungen (I) enthalten die Theorie der Wellenbewegung in einem unbegrenzten Medium; die Aufgabe der Integration besteht in diesem Fall darin, drei Functionen u, v, w von x, y, z, t zu finden, welche dem System der

Gleichungen (I) genügen und von der Art sind, dass für einen bestimmten Zeitmoment, z. B. für $t = 0$, sowohl u, v, w gleich sind den gegebenen Functionen U, V, W, als auch $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ gleich sind den gegebenen Functionen U_1, V_1, W_1; es bedeuten U, V, W und U_1, V_1, W_1 die anfänglichen gegebenen Verrückungen und Geschwindigkeiten in den Richtungen der drei Coordinaten-Axen. — Die Functionen, welche diese drei Bedingungen erfüllen, enthalten die vollständige Lösung des vorliegenden Problems.

Die anfänglichen Verrückungen und Geschwindigkeiten seien von der Art, dass alle Theilchen, welche auf einer bestimmten gegebenen Ebene liegen, eine gleiche anfängliche Verrückung und Geschwindigkeit haben, und dass diese für alle andere Theilchen im anfänglichen Zustand nur eine Function der Entfernung von der gegebenen Ebene seien — alsdann ist für sich klar, dass auch für jeden folgenden Zeitmoment die Verrückungen und Geschwindigkeiten nur eine Function der Zeit und der Entfernung von der gegebenen Ebene sein können, d. h. dass u, v, w nur Functionen von ϱ und t sein können, wenn t die Zeit und ϱ die Entfernung irgend eines Punktes von dieser Ebene bedeuten.

[**428**] Wir legen den Anfangspunkt der Coordinaten in die gegebene Ebene, nennen, wie gesagt, ϱ die Entfernung eines Punktes von ihr, nennen α, β, γ die Cosinus der drei Winkel, welche ϱ mit den Coordinatenaxen x, y, z bildet, so dass $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ und $\varrho = \alpha x + \beta y + \gamma z$ ist[5]; es ist alsdann:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}\alpha^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}\beta^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}\gamma^2 \text{ etc. etc.}$$

Dadurch verwandeln sich die Gleichungen (I) in folgende:

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (D\alpha^2 + A_{11}\beta^2 + A\gamma^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + 2A_{11}\alpha\beta\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + 2A\alpha\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2},$$

$$E\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 2A_{11}\alpha\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + (A_{11}\alpha^2 + C\beta^2 + A_1\gamma^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + 2A_1\beta\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2}, \quad \text{(III)}$$

$$E\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 2A\alpha\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + 2A_1\beta\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + (A\alpha^2 + A_1\beta^2 + B\gamma^2)\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2}.$$

Das Integral dieser Gleichungen lässt sich unter endlicher Form erhalten. Man setze:

$$u = M\varphi(\varrho - mt),$$
$$v = N\varphi(\varrho - mt),$$
$$w = P\varphi(\varrho - mt),$$

wo φ eine willkürliche Function von $(\varrho - mt)$ bedeutet. Werden diese Werthe von u, v, w in (III) gesetzt, so erhält man als Bedingungsgleichungen, denen m, M, N, P: genügen müssen:

$$\begin{aligned} EMm^2 &= (D\alpha^2 + A_{,,}\beta^2 + A\gamma^2)M + 2A_{,,}\alpha\beta N + 2A\alpha\gamma P, \\ ENm^2 &= 2A_{,,}\alpha\beta M + (A_{,,}\alpha^2 + C\beta^2 + A,\gamma^2)N + 2A,\beta\gamma P, \\ EPm^2 &= 2A\alpha\gamma M + 2A,\beta\gamma N + (A\alpha^2 + A,\beta^2 + B\gamma^2)P. \end{aligned} \quad \text{(IV)}$$

[429] Durch Elimination von M, N, P aus diesen Gleichungen erhält man zur Bestimmung von m folgende Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l} (D\alpha^2 + A_{,,}\beta^2 + A\gamma^2 - Em^2)\,. \\ (A_{,,}\alpha^2 + C\beta^2 + A,\gamma^2 - Em^2)\,. \\ (A\alpha^2 + A,\beta^2 + B\gamma^2 - Em^2) \\ -4\,(D\alpha^2 + A_{,,}\beta^2 + A\gamma^2 - Em^2)\,A,^2\beta^2\gamma^2 \\ -4\,(A_{,,}\alpha^2 + C\beta^2 + A,\gamma^2 - Em^2)\,A^2\alpha^2\gamma^2 \\ -4\,(A\alpha^2 + A,\beta^2 + B\gamma^2 - Em^2)\,A_{,,}{}^2\alpha^2\beta^2 \\ \quad + 16\,AA,A_{,,}\alpha^2\beta^2\gamma^2 \end{array}\right\} = 0. \quad \text{(V)}$$

Aus der Gleichung (V) ersieht man, dass m^2 von einer cubischen Gleichung abhängt, also drei Werthe hat; dass folglich m sechs Werthe hat, von denen die eine Hälfte von der anderen sich nur durch das Vorzeichen unterscheidet: es seien diese Wurzeln von (V): $\pm m,$, $\pm m_{,,}$, $\pm m_{,,,}$[6]). Aus (IV) bestimmen sich N und P durch M und m^2, so dass $N = \nu M$ und $P = \omega M$ wird, wo ν und ω abhängen von m^2. Man erhält also für N und P dreierlei Werthe, entsprechend den dreierlei Werthen von m^2; der Werth von M bleibt willkürlich. Wir haben also:

$$\begin{aligned} N, &= \nu, M, , & P, &= \omega, M, , \\ N_{,,} &= \nu_{,,} M_{,,} , & P_{,,} &= \omega_{,,} M_{,,} , \\ N_{,,,} &= \nu_{,,,} M_{,,,} , & P_{,,,} &= \omega_{,,,} M_{,,,} , \end{aligned} \quad \text{(VI)}$$

wo $\nu,$, $\omega,$, $\nu_{,,}$, ... entsprechen den $m,^2$, $m_{,,}{}^2$ und $m_{,,,}{}^2$.

Die willkürliche Function φ kann für jedes m eine andere sein, so dass wir für u, v, w sehr verschiedene particuläre Werthe erhalten, welche den Gleichungen (III) genügen, nämlich[7]):

$$\begin{array}{lll} u=M,\varphi,(\varrho-m,t), & v=\nu,M,\varphi,(\varrho-m,t), & w=\omega,M,\varphi,(\varrho-m,t), \\ u=M,\psi,(\varrho+m,t), & v=\nu,M,\psi,(\varrho+m,t), & w=\omega,M,\psi,(\varrho+m,t), \\ u=M_{,,}\varphi_{,,}(\varrho-m_{,,}t), & v=\nu_{,,}M_{,,}\varphi_{,,}(\varrho-m_{,,}t), & w=\omega_{,,}M_{,,}\varphi_{,,}(\varrho-m_{,,}t), \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

wo $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, $\psi_{,}$, $\psi_{,,}$, $\psi_{,,,}$ sechs verschiedene willkürliche Functionen bedeuten. Die Summe dieser particulären [430] Werthe von u, von v und von w wird das vollständige Integral der Gleichung (III) sein. Setzen wir:

$$\begin{array}{l} \varphi_{,}(\varrho-m,t)+\psi_{,}(\varrho+m,t)=S_{,}, \\ \varphi_{,,}(\varrho-m_{,,}t)+\psi_{,,}(\varrho+m_{,,}t)=S_{,,}, \\ \varphi_{,,,}(\varrho-m_{,,,}t)+\psi_{,,,}(\varrho+m_{,,,}t)=S_{,,,}, \end{array} \qquad \text{(VII)}$$

so haben wir also als vollständiges Integral von (III):

$$\begin{array}{l} u = M,S, + M_{,,}S_{,,} + M_{,,,}S_{,,,}, \\ v = \nu,M,S, + \nu_{,,}M_{,,}S_{,,} + \nu_{,,,}M_{,,,}S_{,,,}, \\ w = \omega,M,S, + \omega_{,,}M_{,,}S_{,,} + \omega_{,,,}M_{,,,}S_{,,,}. \end{array} \qquad \text{(VIII)}$$

Dies ist in der That das vollständige Integral, denn es genügt den Gleichungen (III) und enthält sechs willkürliche Functionen, welche so bestimmt werden können, dass dadurch der Anfangszustand dargestellt werden kann, d. h. dass für $t=0$, $u=U$, $v=V$, $w=W$ und $\frac{\partial u}{\partial t}=U_{,}$, $\frac{\partial v}{\partial t}=V_{,}$, $\frac{\partial w}{\partial t}=W_{,}$ wird.

Bezeichnen wir mit $(S_{,})$ den Werth von $S_{,}$ für $t=0$, d. h. setzen wir:

$$(S_{,})=\varphi_{,}(\varrho)+\psi_{,}(\varrho), \qquad \text{(VIIIa.)}$$

und bedeuten $(S_{,,})$, $(S_{,,,})$ dasselbe für $S_{,,}$ und $S_{,,,}$; bezeichnen wir ferner mit $\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right)$ den Werth von $\frac{\partial S_{,}}{\partial t}$ für $t=0$, oder, was dasselbe ist, da

$$\frac{\partial \varphi_{,}(\varrho - m, t)}{\partial t} = - m, \frac{\partial \varphi_{,}(\varrho - m, t)}{\partial \varrho}$$

ist und

$$\frac{\partial \psi_{,}(\varrho + m, t)}{\partial t} = m, \frac{\partial \psi_{,}(\varrho + m t)}{\partial \varrho},$$

setzen wir:

$$\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right) = m, \left(\frac{\partial \psi_{,}(\varrho)}{\partial \varrho} - \frac{\partial \varphi_{,}(\varrho)}{\partial \varrho}\right), \qquad \text{(IX)}$$

und geben wir $\left(\frac{\partial S_{,,}}{\partial t}\right)$ und $\left(\frac{\partial S_{,,,}}{\partial t}\right)$ dieselbe Bedeutung in Beziehung auf $\psi_{,,}$, $\varphi_{,,}$ und $\psi_{,,,}$, $\varphi_{,,,}$, so erhalten wir zur Bestimmung von $(S_{,})$, ... und $\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right)$, ... folgende Gleichungen:

[431]
$$\begin{aligned} U &= M_{,}(S_{,}) + M_{,,}(S_{,,}) + M_{,,,}(S_{,,,}), \\ V &= \nu_{,} M_{,}(S_{,}) + \nu_{,,} M_{,,}(S_{,,}) + \nu_{,,,} M_{,,,}(S_{,,,}), \\ W &= \omega_{,} M_{,}(S_{,}) + \omega_{,,} M_{,,}(S_{,,}) + \omega_{,,,} M_{,,,}(S_{,,,}). \end{aligned} \qquad \text{(X)}$$

$$U_{,} = M_{,}\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right) + M_{,,}\left(\frac{\partial S_{,,}}{\partial t}\right) + M_{,,,}\left(\frac{\partial S_{,,,}}{\partial t}\right),$$

$$V_{,} = \nu_{,} M_{,}\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right) + \nu_{,,} M_{,,}\left(\frac{\partial S_{,,}}{\partial t}\right) + \nu_{,,,} M_{,,,}\left(\frac{\partial S_{,,,}}{\partial t}\right), \qquad \text{(XI)}$$

$$W_{,} = \omega_{,} M_{,}\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right) + \omega_{,,} M_{,,}\left(\frac{\partial S_{,,}}{\partial t}\right) + \omega_{,,,} M_{,,,}\left(\frac{\partial S_{,,,}}{\partial t}\right).$$

Aus (X) bestimmt man die drei Unbekannten $M_{,}(S_{,})$, $M_{,,}(S_{,,})$, $M_{,,,}(S_{,,,})$ durch U, V, W, $\nu_{,}$, ..., $\omega_{,}$, ... und aus (XII) die drei Unbekannten $M_{,}\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right)$, $M_{,,}\left(\frac{\partial S_{,,}}{\partial t}\right)$, $M_{,,,}\left(\frac{\partial S_{,,,}}{\partial t}\right)$ durch $U_{,}$, $V_{,}$, $W_{,}$, $\nu_{,}$, ..., $\omega_{,}$, ..., indem man diese Gleichungen vom ersten Grade auflöst. Nun hat man nach (VIIIa.) und (IX):

$$(S_{,}) = \psi_{,}(\varrho) + \varphi_{,}(\varrho),$$

$$\frac{1}{m_{,}}\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \psi_{,}(\varrho)}{\partial \varrho} - \frac{\partial \varphi_{,}(\varrho)}{\partial \varrho},$$

oder statt der letzteren:

$$\frac{1}{m_{,}} \int \left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right) d\varrho = \psi_{,}(\varrho) - \varphi_{,}(\varrho).$$

Man hat also:

$$\psi_{,}(\varrho) = \tfrac{1}{2}(S_{,}) + \frac{1}{2m_{,}}\int\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right)d\varrho\,,$$

$$\varphi_{,}(\varrho) = \tfrac{1}{2}(S_{,}) - \frac{1}{2m_{,}}\int\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right)d\varrho\,,$$

wodurch die willkürlichen Functionen $\psi_{,}$ und $\varphi_{,}$ vollständig durch $(S_{,})$ und $\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right)$ bestimmt sind; auf dieselbe Weise sind $\varphi_{,,}(\varrho)$, $\psi_{,,}(\varrho)$ und $\varphi_{,,,}(\varrho)$, $\psi_{,,,}(\varrho)$ durch $(S_{,,})$, $\left(\frac{\partial S_{,,}}{\partial t}\right)$ und $(S_{,,,})$, $\left(\frac{\partial S_{,,,}}{\partial t}\right)$ bestimmt. Wenn in den gefundenen Functionen $\varphi_{,,}$, $\psi_{,,}$, ... statt ϱ respective gesetzt wird [432] $(\varrho - m,t)$ und $(\varrho + m,t)$, ..., diese dann in (VII) in den Werth von $S_{,,}$, ... substituirt, diese so bestimmten Werthe von $S_{,,}$, ... in (VIII) gesetzt werden, so hat man die vollständige Lösung des vorgelegten Problems.

§ 4.

Der anfängliche Zustand des Mediums sei von der Art, dass nur diejenigen Theilchen, welche auf der Ebene, deren Normale mit den Coordinaten-Axen Winkel bildet, deren Cosinus α, β, γ sind, und die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, eine Verrückung erlitten haben und eine Geschwindigkeit besitzen. Alsdann sind U, V, W gleich Null für alle Werthe von ϱ, ausgenommen für $\varrho = 0$; es werden also auch $(S_{,})$, ..., $\left(\frac{\partial S_{,}}{\partial t}\right)$, ... und deshalb auch $\varphi_{,}(\varrho)$, ..., $\psi_{,}(\varrho)$, ... für alle Werthe von ϱ, ausgenommen für $\varrho = 0$, verschwinden; daher können $\varphi_{,}(\varrho - m,t)$, ... $\psi_{,}(\varrho + m,t)$, ... nur Werthe haben, wenn die unter dem Functions-Zeichen stehende Grössen $= 0$ sind. Also $\varphi_{,}(\varrho - m,t)$ hat nur einen Werth, wenn $\varrho - m,t = 0$, $\psi_{,}(\varrho + m,t)$ nur einen Werth, wenn $\varrho + m,t = 0$, u. s. w.

Zu irgend einer Zeit werden also die in dem Medium ursprünglich erregten, in der gegebenen Ebene liegenden Verrückungen und Geschwindigkeiten der Theilchen sich auf sechs von einander verschiedenen Ebenen befinden, die parallel

mit der ursprünglichen Ebene sind, und deren Entfernungen von ihr sind:

$$\varrho = \pm m_{,} t\,,$$
$$\varrho = \pm m_{,,} t\,,$$
$$\varrho = \pm m_{,,,} t\,.$$

Man sieht also, wie die ursprünglichen, in einer Ebene gelegenen Verrückungen und Impulse in dem Medium sechs Wellenebenen erregen, von denen drei sich vorwärts und drei sich rückwärts bewegen; die drei auf derselben Seite liegenden Wellenebenen schreiten fort mit den gleichförmigen Geschwindigkeiten $m_{,}$, $m_{,,}$, $m_{,,,}$. — Die [433] Verrückungen in (VIII) u, v, w zerfallen demnach für die drei auf der positiven Seite fortschreitenden Wellenebenen in:

Erste Wellenebene.

$$u = M_{,}\varphi_{,}(\varrho - m_{,}t)\,,$$
$$v = \nu_{,} M_{,}\varphi_{,}(\varrho - m_{,}t)\,,$$
$$w = \omega_{,} M_{,}\varphi_{,}(\varrho - m_{,}t)\,.$$

Zweite Wellenebene.

$$u = M_{,,}\varphi_{,,}(\varrho - m_{,,}t)\,,$$
$$v = \nu_{,,} M_{,,}\varphi_{,,}(\varrho - m_{,,}t)\,,$$
$$w = \omega_{,,} M_{,,}\varphi_{,,}(\varrho - m_{,,}t)\,.$$

Dritte Wellenebene.

$$u = M_{,,,}\varphi_{,,,}(\varrho - m_{,,,}t)\,,$$
$$v = \nu_{,,,} M_{,,,}\varphi_{,,,}(\varrho - m_{,,,}t)\,,$$
$$w = \omega_{,,,} M_{,,,}\varphi_{,,,}(\varrho - m_{,,,}t)\,.$$

(XII)

Die Richtung der Verrückungen in der ersten Wellenebene bildet mit den drei Coordinaten-Axen x, y, z Winkel, deren Cosinus:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\nu_{,}^2+\omega_{,}^2}}\,,\quad \frac{\nu_{,}}{\sqrt{1+\nu_{,}^2+\omega_{,}^2}}\,,\quad \frac{\omega_{,}}{\sqrt{1+\nu_{,}^2+\omega_{,}^2}}\,. \qquad \text{(XIII)}$$

Die Cosinus der Verrückungen in der zweiten Wellenebene und in der dritten erhält man durch Vertauschung von $\nu_{,}$ mit $\nu_{,,}$ und $\nu_{,,,}$ und von $\omega_{,}$ mit $\omega_{,,}$ und $\omega_{,,,}$.

Es bleibt noch die Discussion der cubischen Gleichung (V), durch welche die dreierlei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $m_{,}$, $m_{,,}$, $m_{,,,}$ bestimmt werden, und die nähere Untersuchung der Grössen $\nu_{,}$, $\nu_{,,}$, $\nu_{,,,}$, $\omega_{,}$, $\omega_{,,}$, $\omega_{,,,}$.

§ 5.

In dem dreiaxigen Ellipsoid, dessen Gleichung:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 1 \quad \text{(a)}$$

ist, sollen die drei Hauptaxen ihrer Lage und Grösse nach bestimmt werden. Verwandelt man die rechtwinkligen Coordinaten in Polar-Coordinaten, nennt den Radiusvector R, die Cosinus der Winkel, welche derselbe mit den drei rechtwinkligen Coordinaten-Axen bildet: p, q, r, so dass also $x = Rp$, $y = Rq$, $z = Rr$ und $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ ist, so verwandelt sich die Gleichung des Ellipsoids in folgende:

[434] $$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dpq + 2Epr + 2Fqr = \frac{1}{R^2}. \quad \text{(b)}$$

Den drei Hauptaxen entsprechen die grössten und kleinsten Werthe von $\frac{1}{R^2}$, man hat also:

$$Ap + Dq + Er + (Ep + Fq + Cr)\frac{\partial r}{\partial p} = 0,$$
$$Dp + Bq + Fr + (Ep + Fq + Cr)\frac{\partial r}{\partial q} = 0,$$
$$p + r\frac{\partial r}{\partial p} = 0,$$
$$q + r\frac{\partial r}{\partial q} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen zieht man durch Elimination von $\frac{\partial r}{\partial p}$ und $\frac{\partial r}{\partial q}$:

$$\begin{aligned}(Ap + Dq + Er)r - (Ep + Fq + Cr)p &= 0,\\ (Dp + Bq + Fr)r - (Ep + Fq + Cr)q &= 0.\end{aligned} \quad \text{(c)}$$

Die Gleichung (b) lässt sich in folgende Form bringen:

$$(Ap + Dq + Er)p + (Dp + Bq + Fr)q + (Ep + Fq + Cr)r = \frac{1}{R^2}. \quad \text{(d)}$$

Durch die Combination von (c) und (d) erhält man:

$$\begin{aligned} Ap + Dq + Er &= \frac{p}{R^2}, \\ Dp + Bq + Fr &= \frac{q}{R^2}, \\ Ep + Fq + Cr &= \frac{r}{R^2}, \end{aligned} \qquad \text{(e)}$$

aus welcher $\frac{q}{p}$, $\frac{r}{p}$ und $\frac{1}{R^2}$ zu finden ist[8]).

Vergleicht man die Gleichungen (e) mit dem System von Gleichungen (IV), wodurch m^2, $\frac{N}{M}$, $\frac{P}{M}$ bestimmt wird, so sieht man ihre vollkommene Aehnlichkeit und [435] schliesst daraus, dass

$$\sqrt{\frac{1}{m_,^2 E}}, \quad \sqrt{\frac{1}{m_{,,}^2 E}}, \quad \sqrt{\frac{1}{m_{,,,}^2 E}}$$

nichts anderes sind, als die drei Hauptaxen eines Ellipsoids, und dass

$$\frac{M_,}{\sqrt{M_,^2 + N_,^2 + P_,^2}}, \quad \frac{N_,}{\sqrt{M_,^2 + N_,^2 + P_,^2}}, \quad \frac{P_,}{\sqrt{M_,^2 + N_,^2 + P_,^2}}, \ldots$$

oder:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_,^2 + \omega_,^2 + 1}}, \quad \frac{\nu_,}{\sqrt{\nu_,^2 + \omega_,^2 + 1}}, \quad \frac{\omega_,}{\sqrt{\nu_,^2 + \omega_,^2 + 1}}, \ldots$$

die Cosinus der Winkel sind, welche die Hauptaxen jenes Ellipsoids mit den drei Coordinaten-Axen bilden.

Die Gleichung jenes Ellipsoids findet man:

$$\left.\begin{aligned} &(D\alpha^2 + A_{,,}\beta^2 + A\gamma^2)x^2 \\ &+ (A_{,,}\alpha^2 + C\beta^2 + A_,\gamma^2)y^2 \\ &+ (A\alpha^2 + A_,\beta^2 + B\gamma^2)z^2 \\ &+ 4A_{,,}\alpha\beta xy + 4A\alpha\gamma xz + 4A_,\beta\gamma yz \end{aligned}\right\} = 1. \qquad \text{(XIV)}$$

Wir sind also zu dem merkwürdigen Theorem gekommen, dass die in einer Ebene gelegenen ursprünglichen Verrückungen in einem krystallinischen Medium

immer dreierlei mit verschiedener Geschwindigkeit gleichförmig fortschreitende Wellenebenen erregen, in welchen, welches auch die Richtung der ursprünglichen Verrückungen war, im Allgemeinen die Bewegungen in drei auf einander senkrechten Richtungen stattfinden, nämlich parallel den drei Axen des Ellipsoids (XIV)[9].

Wegen der Rechtwinkligkeit der drei Richtungen, die durch $\nu_,$, $\omega_,$; $\nu_{,,}$, $\omega_{,,}$; und $\nu_{,,,}$, $\omega_{,,,}$ bestimmt werden, ist

$$1 + \nu_, \nu_{,,} + \omega_, \omega_{,,} = 0,$$
$$1 + \nu_, \nu_{,,,} + \omega_, \omega_{,,,} = 0,$$
$$1 + \nu_{,,} \nu_{,,,} + \omega_{,,} \omega_{,,,} = 0,$$

und daher erhält man aus (X):

[436]
$$(1 + \nu_,^2 + \omega_,^2) M_,(S_,) = U + \nu_, V + \omega_, W,$$
$$(1 + \nu_{,,}^2 + \omega_{,,}^2) M_{,,}(S_{,,}) = U + \nu_{,,} V + \omega_{,,} W,$$
$$(1 + \nu_{,,,}^2 + \omega_{,,,}^2) M_{,,,}(S_{,,,}) = U + \nu_{,,,} V + \omega_{,,,} W,$$

und eben so aus (XI) die Werthe für $\left(\frac{\partial S_,}{\partial t}\right)$, $\cdots$, wenn U, V, W vertauscht werden mit $U_,$, $V_,$, $W_,$. Es sind also $\sqrt{1 + \nu_,^2 + \omega_,^2}\, M_,(S_,)$, $\sqrt{1 + \nu_{,,}^2 + \omega_{,,}^2}\, M_{,,}(S_{,,})$, $\cdots$ die Componenten der ursprünglichen Verrückungen nach den drei Axen des Ellipsoids (XIV), parallel welchen Axen alle Verrückungen in den erregten Wellenebenen stattfinden, und $\sqrt{1 + \nu_,^2 + \omega_,^2}\, M_,\left(\frac{\partial S_,}{\partial t}\right)$, $\cdots$ die Componenten der ursprünglichen Geschwindigkeiten nach denselben Axen.

Wenn das Medium, in welchem die vibrirende Bewegung erregt ist, ein unkrystallinisches wäre, wo also $A = A_, = A_{,,} = \frac{1}{3}B = \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}D$ ist, so verwandelt sich das Ellipsoid (XIV[a]) in $x^2 + y^2 + z^2 + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \frac{1}{A}$.

Dies ist die Gleichung eines Ellipsoids, dessen eine Hauptaxe zusammenfällt mit der Normale der Wellenebenen, dessen beide andere Axen unter sich gleich sind und parallel der Wellenebene liegen. Die Grösse der einen Axe ist $\sqrt{\frac{1}{3A}}$, die der beiden gleichen Axen ist $\sqrt{\frac{1}{A}}$[10].

Hieraus schliesst man, dass in einer der erregten Wellen die Bewegung senkrecht auf der Wellenfläche stattfindet, und dass deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{3A}{E}}$ ist; in den beiden anderen Wellenebenen sind die Verrückungen der Theilchen parallel mit der Wellenebene. Beide haben dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit, [437] nämlich $\sqrt{\frac{A}{E}}$, bilden also nur eine Welle. Die Richtung der beiden gleichen Axen in der Wellenebene bleibt unbestimmt, woraus man schliesst, dass die Bewegung in dieser Welle als in zwei beliebigen rechtwinkligen, in der Wellenebene liegenden Richtungen geschehend betrachtet werden kann. Dieses Resultat: dass in unkrystallinischen Medien von der Natur fester Körper, ausser einem Wellensystem, dessen Schwingungen senkrecht auf der Wellenebene geschehen, noch ein zweites, wo die Theilchen parallel mit der Wellenebene schwingen, erregt werden, ist zuerst von *Poisson* aus den Gleichungen der Mechanik abgeleitet. *(Mém. de l'Académie, T. X.)* [11])

Wenn die Erregungsebene, d. i. die anfängliche Wellenebene, parallel einer der Coordinatenebenen ist, d. i. senkrecht auf einer der Krystallaxen steht, so fallen die Axen des Ellipsoids (XIV) zusammen mit den drei rechtwinkligen Krystallaxen. Es sei:

1) die Welle senkrecht auf z, alsdann ist $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, und die Gleichung des Ellipsoids wird:

$$Ax^2 + A,y^2 + Bz^2 = 1.$$

Die drei Axen dieses Ellipsoids sind $\sqrt{\frac{1}{A}}$, $\sqrt{\frac{1}{A,}}$, $\sqrt{\frac{1}{B}}$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der dreierlei erregten Wellenebenen also $\sqrt{\frac{A}{E}}$, $\sqrt{\frac{A,}{E}}$, $\sqrt{\frac{B}{E}}$, und die Richtung der Bewegung in diesen drei Wellenebenen geschieht respective parallel den drei Axen x, y, z.

2) Die Wellen seien senkrecht auf y, d. h. $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 1$; die Gleichung des Ellipsoids wird:

$$A,,x^2 + Cy^2 + A,z^2 = 1.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen, deren Bewegungen parallel den Axen x, y, z, sind respective:

[438] $$\sqrt{\frac{A_{,,}}{E}}, \sqrt{\frac{C}{E}}, \sqrt{\frac{A_{,}}{E}}.$$

3) Die Wellenebene steht senkrecht auf x, d. h. $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$, so wird die Gleichung

$$Dx^2 + A_{,,}y^2 + Az^2 = 1,$$

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen, in welchen die Theile sich parallel x, y, z bewegen, sind respective:

$$\sqrt{\frac{D}{E}}, \sqrt{\frac{A_{,,}}{E}}, \sqrt{\frac{A}{E}}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem Verhalten der Wellensysteme in doppeltbrechenden zweiaxigen Krystallen, so sieht man leicht, dass man einen polarisirten Strahl[12]) nur denjenigen zu nennen braucht, in welchem die Schwingungen in einer durch den Strahl gelegten Ebene senkrecht auf dem Strahl stattfinden, und die Polarisationsebene diese durch den Strahl gelegte Ebene — um zwischen den beiden Strahlen, in welche der Krystall den einfallenden theilt, oder vielmehr zwischen den beiden ihnen entsprechenden Wellenebenen und denjenigen der eben gefundenen, in welchen die Schwingungen in der Wellenebene ausgeführt werden, die vollkommenste Gleichheit zu finden; was die dritte der gefundenen Wellenebenen betrifft, in welcher die Schwingungen senkrecht auf der Wellenebene stattfinden, so kennen wir nichts, was ihr in der Lichtundulation entspricht. In der That, behält man die Bezeichnung der drei Krystallaxen mit x, y, z bei, so weiss man, dass der in der Richtung von z sich bewegende Strahl zerfällt in zwei Strahlen, die polarisirt sind parallel mit x und y, und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit respective seien a und $a_{,}$; der parallel mit y sich bewegende Strahl zerfällt in zwei nach x und z polarisirte Strahlen mit den respectiven Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $a_{,,}$, $a_{,}$, und endlich der mit x parallel sich bewegende Strahl zerfällt in zwei nach y und z polarisirte Strahlen mit den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten [439] $a_{,,}$ und a[13]). Man braucht nur die Buchstaben a, $a_{,}$, $a_{,,}$ mit $\sqrt{\frac{A}{E}}$, $\sqrt{\frac{A_{,}}{E}}$, $\sqrt{\frac{A_{,,}}{E}}$ zu ver-

tauschen, um in diesem experimentalen Resultat nur den Ausdruck des eben gefundenen theoretischen Resultats zu haben.

Nennt man bei einem optisch zweiaxigen Krystall die Ebene, welche durch zwei der krystallinischen Axen (oder durch zwei Elasticitätsaxen, nach *Fresnel*) gelegt ist, einen Hauptschnitt, so weiss man, dass, so lange die beiden zusammengehörigen Strahlen[12]) sich in demselben Hauptschnitt befinden, der eine Strahl, welches auch seine Richtung sei in diesem Hauptschnitt, immer dieselbe Geschwindigkeit hat. Dieser Strahl ist so polarisirt, dass seine Polarisationsebene zusammenfällt mit dem Hauptschnitt; der andere Strahl ist senkrecht auf dem Hauptschnitt polarisirt, und seine Geschwindigkeit kann dargestellt werden durch die gegen ihn senkrecht stehenden, in 1 dividirten Radiivectoren einer Ellipse, die in diesem Hauptschnitt so construirt ist, dass ihre Hauptaxen der Richtung nach zusammenfallen mit den Axen des Krystalles, und ihre Längen respective ausdrücken diejenigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche der Strahl hat, wenn er sich senkrecht gegen diese Axen des Krystalls bewegt. Wir wollen untersuchen, ob mit diesem empirischen Gesetz die aufgestellte Theorie gleichfalls in Uebereinstimmung sich findet. Setzen wir $\alpha = 0$, um diejenigen Wellenebenen zu untersuchen, die senkrecht gegen den Hauptschnitt durch z und y gehen, so verwandelt die Gleichung (V) sich in das Product zweier Factoren und zerfällt also:

$$1)\ A_{,,}\beta^2 + A\gamma^2 - Em^2 = 0\,,$$

$$2)\ (C\beta^2 + A,\gamma^2 - Em^2)\,(A,\beta^2 + B\gamma^2 - Em^2) - 4A,^2\gamma^2\beta^2 = 0.$$

Die Gleichung 1) entspricht einer nach x polarisirten Welle[14]), und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist der in 1 dividirte Radiusvector einer Ellipse, die ganz auf dieselbe [**440**] Weise construirt ist, wie bei dem nach x polarisirten Lichtstrahl.

Die Gleichung 2) muss für eine zweite nach dem Hauptschnitt polarisirte Welle eine constante Geschwindigkeit geben, wenn die Analogie dieser Wellen mit den beiden Lichtstrahlen vollständig sein soll.

Untersucht man die Bedingungen, unter welchen die Gleichung 2) sich in ein Product von der Form

$$(\mu\beta^2 + \nu\gamma^2 - Em^2)\,(\mu,\beta^2 + \nu,\gamma^2 - Em^2)$$

verwandelt[15]), so findet man:

$$\mu = A_{,}, \qquad \mu_{,} = C,$$
$$\nu = A_{,}, \qquad \nu_{,} = B,$$
$$(B - A_{,})(C - A_{,}) = 4A_{,}^{2}, \tag{XV}$$

woraus man sieht, dass die Constanten B, C, $A_{,}$ eine Bedingungsgleichung (XV) erfüllen müssen, wenn sich 2) in zwei Factoren der angenommenen Form zerlegen lassen soll. Alsdann hat man aber:

$$3)\ A_{,} - Em^{2} = 0,$$
$$4)\ C\beta^{2} + B\gamma^{2} - Em^{2} = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Bedingung (XV) erfüllt ist, erhält also in der That die nach dem Hauptschnitt polarisirte Welle eine constante Geschwindigkeit, welches auch ihre Neigung gegen z oder y sei. Die Analogie mit dem Verhalten der beiden Lichtstrahlen in dem Hauptschnitt yz ist also vollständig, und ebenso vollständig ist sie in den anderen beiden Hauptschnitten, wenn man zu der Bedingungsgleichung (XV) noch die analogen hinzufügt:

$$(B - A)(D - A) = 4A^{2},$$
$$(C - A_{,,})(D - A_{,,}) = 4A_{,,}^{2}. \tag{XVI}$$

§ 6.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass für das durch die cubische Gleichung (V) gegebene Gesetz der Geschwindigkeiten einer Wellenebene, die eine beliebige Lage gegen die Axen des krystallinischen Mediums besitzt, die *Fresnel*'sche Construction an seiner Elasticitätsfläche [**441**] eine erste Annäherung ist. Diese Construction drückt jenes in (V) enthaltene Gesetz genau aus, bis auf die ersten Potenzen der Excentricitäten der Ellipsen, welche wir im vorhergehenden Paragraphen für das Gesetz der Geschwindigkeiten in den Wellen, welche auf einem Hauptschnitt senkrecht stehen, gefunden haben. Diese Excentricitäten sind bei allen optisch untersuchten Krystallen nur kleine Grössen. Diese Congruenz des in (V) enthaltenen Gesetzes mit der *Fresnel*'schen Construction findet nur unter den Bedingungen, welche durch (XV) und (XVI) ausgedrückt sind, statt[16].

Was diese Bedingungsgleichungen betrifft, so mag man darüber noch folgende Reflexionen sich gefallen lassen. Der

Widerstand, womit die krystallinischen Substanzen der Zusammendrückung oder Verschiebung in sich widerstehen, ist im Allgemeinen sehr viel grösser als der Unterschied in diesem Widerstand nach den verschiedenen Richtungen; man kann sich deshalb die Function F in (II) als bestehend aus einem constanten Gliede $\mathfrak{E}$[17]) und einem von $\cos^2 a$, $\cos^2 b$, $\cos^2 c$ abhängigen F_1 vorstellen, wo F_1 sehr viel kleiner als $\mathfrak{E}$ ist. Es sei also $F = \mathfrak{E} + F_1$, alsdann verwandeln sich die Gleichungen (II) wenn $p\mathfrak{E}\frac{4}{15}\pi = L$ gesetzt wird, in:

$$A = L + p\int dm F_1 \cos^2 a \cos^2 c, \quad B = 3L + p\int dm F_1 \cos^4 c,$$
$$A_1 = L + p\int dm F_1 \cos^2 b \cos^2 c, \quad C = 3L + p\int dm F_1 \cos^4 b,$$
$$A_{11} = L + p\int dm F_1 \cos^2 a \cos^2 b, \quad D = 3L + p\int dm F_1 \cos^4 a,$$

wo die Werthe der Integrale kleine Grössen gegen L sind. Denken wir uns nun F_1 entwickelt nach den Potenzen von $\cos^2 a$, ..., berücksichtigen nur die ersten Potenzen, so dass:

$$F_1 = \mathfrak{m}\cos^2 a + \mathfrak{n}\cos^2 b + \mathfrak{p}\cos^2 c \qquad (A)$$

ist, wo also $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ kleine Grössen gegen L sind, so erhalten wir:

$$A = L + \lambda(\mathfrak{m} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{n} + \mathfrak{p}), \quad B = 3L + \lambda(\mathfrak{m} + \mathfrak{n} + 5\mathfrak{p}),$$
$$A_1 = L + \lambda(\tfrac{1}{3}\mathfrak{m} + \mathfrak{n} + \mathfrak{p}), \quad C = 3L + \lambda(\mathfrak{m} + 5\mathfrak{n} + \mathfrak{p}), \qquad (B)$$
$$A_{11} = L + \lambda(\mathfrak{m} + \mathfrak{n} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{p}), \quad D = 3L + \lambda(5\mathfrak{m} + \mathfrak{n} + \mathfrak{p}),$$

wenn $\lambda = \frac{4}{35}p\pi$ gesetzt wird.

[442] Die angenommene Form von F_1 kann, wie bemerkt, als eine Annäherung angesehen werden an die wahren Werthe von F_1; F_1 würde genau diese Form haben, wenn wir statt eines krystallinischen Mediums uns ein Medium dächten, welches sich in dem Zustande linearer Verdichtungen und Verdünnungen befände, in welchem sich z. B. ein rechtwinkliges Glasparallelepipedon befindet, wenn dasselbe in drei auf einander rechtwinkligen Richtungen durch dreierlei auf seine Seitenebenen wirkende Druckkräfte comprimirt ist.

Setzt man diese Werthe von $A, \ldots, B, \ldots$ in die Bedingungsgleichungen (XV) und (XVI), so findet man diese erfüllt bis auf die Quadrate der Unterschiede von $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, d. h. erfüllt bis auf die Quadrate der Excentricitäten der Ellipsen, wodurch nach dem vorhergehenden Paragraphen die Geschwindigkeiten der auf einem Hauptschnitt senkrecht stehenden Wellenebenen dargestellt werden.

Setzt man in den Bedingungsgleichungen (XV) und (XVI)[18]):

$$\begin{aligned} C - A_{,} &= c, & A - A_{,} &= \Delta_{,,}, \\ B - A &= b, & A_{,,} - A &= \Delta_{,}, \\ D - A_{,,} &= d, & A_{,} - A_{,,} &= \Delta = -\Delta_{,} - \Delta_{,,}, \end{aligned}$$

so verwandeln sich diese in:

$$\begin{aligned} (\Delta_{,,} + b)\, c &= 4 A_{,}^{2}, \\ (\Delta_{,} + d)\, b &= 4 A^{2}, \\ (\Delta + c)\, d &= 4 A_{,,}^{2}. \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Aus dem Product der Gleichungen (a), wenn die zweiten Potenzen von Δ, $\Delta_{,}$, $\Delta_{,,}$ vernachlässigt werden, erhält man:

$$b c d = 8 A A_{,} A_{,,}, \qquad \text{(b)}$$

oder:

$$(C - A_{,})(B - A)(D - A_{,,}) = 8 A A_{,} A_{,,}, \qquad \text{(XVII)}$$

und auf eine ganz ähnliche Weise ergiebt sich:

$$(B - A_{,})(D - A)(C - A_{,,}) = 8 A A_{,} A_{,,}. \qquad \text{(XVIII)}$$

Mittelst der Gleichung (b) lassen sich die Gleichungen (a) bei Vernachlässigung der Glieder, die von Δ^2, ... [443] abhängen, leicht auflösen, und substituirt man statt $b, c, d, \Delta, \ldots$ ihre Werthe, so findet man:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} B &= A + A_{,} - A_{,,} \text{ und } A = \frac{B + D}{6}, \\ \tfrac{1}{3} C &= A_{,} + A_{,,} - A \;\; - \;\; A_{,} = \frac{B + C}{6}, \\ \tfrac{1}{3} D &= A_{,,} + A - A_{,} \;\; - \;\; A_{,,} = \frac{C + D}{6}. \end{aligned} \qquad \text{(XIX)}$$

§ 7.

Die Gleichung (V), welche das Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ebener, unbegrenzter Wellen darstellt, ist von der Form:

$$\mu^6 - M\mu^4 + N\mu^2 - P = 0,$$

wo $\mu^2 = Em^2$ gesetzt ist. Die Coefficienten M, N, P haben folgende Werthe:

$$M = A + A_{,} + A_{,,} + (D - A_{,})\,\alpha^2 + (C - A)\,\beta^2 + (B - A_{,,})\,\gamma^2,$$

$$\begin{aligned} N = {} & (AA_{,,} + A_{,}D)\,\alpha^2 + (A_{,}A_{,,} + AC)\,\beta^2 + (AA_{,} + A_{,,}B)\,\gamma^2 \\ & + D(A + A_{,,} - A_{,})\,\alpha^4 + C(A_{,} + A_{,,} - A)\,\beta^4 \\ & + B(A + A_{,} - A_{,,})\,\gamma^4 \\ & + (DB - 3A^2)\,\alpha^2\gamma^2 + (CD - 3A_{,,}^2)\,\alpha^2\beta^2 \\ & + (CB - 3A_{,}^2)\,\beta^2\gamma^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P = {} & (D\alpha^4 + C\beta^4 + B\gamma^4)(AA_{,,}\alpha^2 + A_{,}A_{,,}\beta^2 + AA_{,}\gamma^2) \\ & + (BC - 3A_{,}^2)(A\gamma^2 + A_{,,}\beta^2)\,\beta^2\gamma^2 \\ & + (BD - 3A^2)(A_{,}\gamma^2 + A_{,,}\alpha^2)\,\alpha^2\gamma^2 \\ & + (CD - 3A_{,,}^2)(A_{,}\beta^2 + A\alpha^2)\,\alpha^2\beta^2 \\ & + [BCD - 3(BA_{,,}^2 + CA^2 + DA_{,}^2) + 18AA_{,}A_{,,}]\,\alpha^2\beta^2\gamma^2. \end{aligned}$$

Diese Werthe verwandeln sich, mit Hülfe der im vorhergehenden Paragraphen angenommenen Relationen zwischen A, $A_{,}$ und $A_{,,}$ und B, C, D, in[19]):

$$\begin{aligned} M = {} & D\alpha^2 + C\beta^2 + B\gamma^2 + (A + A_{,,})\alpha^2 + (A_{,} + A_{,,})\beta^2 \\ & + (A + A_{,})\,\gamma^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = {} & AA_{,,}\alpha^2 + A_{,}A_{,,}\beta^2 + AA_{,}\gamma^2, \\ & + (D\alpha^2 + C\beta^2 + B\gamma^2)[(A + A_{,,})\,\alpha^2 + (A_{,} + A_{,,})\,\beta^2 \\ & + (A + A_{,})\,\gamma^2], \end{aligned}$$

$$P = (D\alpha^2 + C\beta^2 + B\gamma^2)(AA_{,,}\alpha^2 + A_{,}A_{,,}\beta^2 + AA_{,}\gamma^2).$$

[444] Werden diese Werthe von M, N, P in die cubische Gleichung:

$$\mu^6 - M\mu^4 + N\mu^2 - P = 0$$

substituirt, so bemerkt man leicht, dass sie sich in ein Product zweier Factoren verwandelt, so dass sie in folgende zwei Gleichungen zerfällt:

$$\mu^2 - (D\alpha^2 + C\beta^2 + B\gamma^2) = 0 \qquad \text{(XX)}$$

und

$$\begin{aligned} \mu^4 - {} & [(A + A_{,,})\,\alpha^2 + (A_{,} + A_{,,})\,\beta^2 + (A + A_{,})\,\gamma^2]\,\mu^2 \\ & + AA_{,,}\alpha^2 + A_{,}A_{,,}\beta^2 + AA_{,}\gamma^2 = 0\,. \end{aligned} \qquad \text{(XXI)}$$

Letztere Gleichung lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{\alpha^2}{\mu^2 - A_{,}} + \frac{\beta^2}{\mu^2 - A} + \frac{\gamma^2}{\mu^2 - A_{,,}} = 0\,. \qquad \text{(XXII)}$$

Diese Gleichung (XXII) lässt sich durch folgende geometrische Construction auflösen: Man construire eine Fläche, deren Radiusvector ϱ so bestimmt ist, dass:

$$\varrho^2 = A, a^2 + A b^2 + A_{,,} c^2 , \qquad \text{(XXIII)}$$

wo a, b, c die Cosinus der Winkel sind, welche ϱ mit den drei Axen des krystallinischen Mediums x, y, z bildet; man schneide diese Fläche mit einer durch den Mittelpunkt gelegten Ebene, deren Normale mit denselben Axen Winkel bildet, deren Cosinus sind: α, β, γ; der grösste und kleinste Halbmesser dieses Schnittes stellt die Wurzeln der Gleichung (XXII) dar. Die Gleichung der schneidenden Ebene ist:

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma z . \qquad (1)$$

Es sei irgend ein Radiusvector der Fläche $x = pz$, $y = qz$, so dass in (XXIII) ist:

$$a = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad b = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} .$$

Es liege dieser Radiusvector zugleich in der schneidenden Ebene, alsdann verwandeln sich die Gleichungen (XXIII) und (1) in:

$$\varrho^2 (1 + p^2 + q^2) = A, p^2 + A q^2 + A_{,,} , \qquad (2)$$

$$0 = \alpha p \quad + \beta q \quad + \gamma . \qquad (3)$$

[**445**] Es soll ϱ in Beziehung auf p oder q ein Maximum oder Minimum sein[8]); man hat also:

$$0 = (\varrho^2 - A,) p + (\varrho^2 - A) q \frac{dq}{dp} ,$$

$$0 = \alpha + \beta \frac{dq}{dp} ,$$

und durch Elimination von $\frac{dq}{dp}$:

$$0 = \beta (\varrho^2 - A,) p - \alpha (\varrho^2 - A) q . \qquad (4)$$

Aus (4) und (3) erhält man:

$$p = \frac{-\alpha\gamma(\varrho^2 - A)}{\alpha^2(\varrho^2 - A) + \beta^2(\varrho^2 - A,)} ,$$

$$q = \frac{-\beta\gamma(\varrho^2 - A,)}{\alpha^2(\varrho^2 - A) + \beta^2(\varrho^2 - A,)} ,$$

und werden diese Werthe in (2) gesetzt, so geht nach gehöriger Reduction hervor:

$$\frac{\alpha^2}{\varrho^2 - A_{,}} + \frac{\beta^2}{\varrho^2 - A} + \frac{\gamma^2}{\varrho^2 - A_{,,}} = 0. \qquad (5)$$

Diese Gleichung (5) congruirt mit der Gleichung (XXII), wenn statt ϱ^2 gesetzt wird μ^2, wodurch also die Richtigkeit der geometrischen Construction erwiesen ist. Die Fläche (XXIII) ist aber die *Fresnel*'sche Elasticitätsfläche[20]), und die eben bewiesene Construction der Wurzeln der Gleichung (XXII) ist identisch mit derjenigen, welche *Fresnel* gegeben hat, um die Geschwindigkeiten der Fortpflanzung der beiden ebenen Lichtwellen in einer beliebigen Lage in einem doppeltbrechenden zweiaxigen Medium zu finden.

§ 8.

Es bleibt noch übrig zu untersuchen, welches die Richtungen sind, parallel welchen die Schwingungen der Theilchen in den beiden Wellen, deren Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch (XXII), und in der Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch (XX) gegeben ist, ausgeführt werden.

In der letzteren Welle (XX) geschehen die Schwingungen [446] sehr nahe senkrecht auf der Wellenebene, in den beiden andern schwingen die Theilchen sehr nahe parallel mit der Wellenebene, und zwar so, dass die Richtung ihrer Schwingung nahe senkrecht steht auf demjenigen Radiusvector des Durchschnitts der Wellenebene und der Fläche (XXIII), durch welchen ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach der Construction des vorhergehenden Paragraphen gegeben ist.

Behalten wir die Bezeichnung des vorigen Paragraphen bei, so bildet dieser Radiusvector mit den drei Axen der Coordinaten Winkel, deren Cosinus:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Die Normale der Wellenebene bildet mit denselben Axen Winkel, deren Cosinus:

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma.$$

Eine Linie, die gegen jenen Radiusvector und gegen diese Normale senkrecht steht, bilde mit den drei Axen Winkel, deren Cosinus X, Y, Z seien; alsdann hat man, um X, Y, Z zu bestimmen:

$$\begin{aligned} Xp + Yq + Z &= 0, \\ X\alpha + Y\beta + Z\gamma &= 0, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} X(\alpha - \gamma p) + (\beta - \gamma q)\,Y &= 0, \\ X(\alpha q - \beta p) - (\beta - \gamma q)\,Z &= 0; \end{aligned}$$

werden hierin substituirt die Werthe für p und q des vorigen Paragraphen in Verbindung mit (5), nämlich:

$$p = \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\varrho^2 - A_{,,}}{\varrho^2 - A_{,}},$$

$$q = \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{\varrho^2 - A_{,,}}{\varrho^2 - A},$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} X\alpha\,\frac{A_{,} - A_{,,}}{\varrho^2 - A_{,}} + Y\beta\,\frac{A - A_{,,}}{\varrho^2 - A} &= 0, \\ X\alpha\,\frac{A_{,} - A}{\varrho^2 - A_{,}} + Z\gamma\,\frac{A_{,,} - A}{\varrho^2 - A_{,,}} &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

[447] Aus den Gleichungen (IV) zieht man durch Elimination von P und durch Elimination von N zur Bestimmung von M, N, P folgende Gleichungen, wenn $Em^2 = \mu^2$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} &[A, \beta\gamma\,(D\alpha^2 + A_{,,}\beta^2 + A\gamma^2 - \mu^2) - 2\,A A_{,,}\alpha^2\beta\gamma]\,M \\ &= [A\alpha\gamma\,(A_{,,}\alpha^2 + C\beta^2 + A_{,}\gamma^2 - \mu^2) - 2\,A_{,}A_{,,}\alpha\beta^2\gamma]\,N \\ &= [A_{,,}\alpha\beta\,(A\alpha^2 + A_{,}\beta^2 + B\gamma^2 - \mu^2) - 2\,A A_{,}\alpha\beta\gamma^2]\,P. \end{aligned} \tag{A}$$

Setzt man statt B, C, D ihre Werthe aus (XIX), und statt $\mu^2 : (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,\mu^2$, so erhält man aus der ersten dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned} &[A, \beta\gamma\,(\alpha^2(A_{,,} - \mu^2) + \beta^2(A_{,,} - \mu^2) + \gamma^2(A - \mu^2)) \\ &\qquad + (2\,A_{,,} - 3\,A_{,})(A_{,} - A)\,\alpha^2\beta\gamma]\,M \\ &= [A\alpha\gamma\,(\alpha^2(A_{,,} - \mu^2) + \beta^2(A_{,,} - \mu^2) + \gamma^2(A_{,} - \mu^2)) \\ &\qquad - (2\,A_{,,} - 3\,A)(A_{,} - A)\,\alpha\beta^2\gamma]\,N. \end{aligned}$$

Verbindet man diese Gleichung mit (XXII):

$$\left[A,\beta\gamma\,(A_{,,}-\mu^2)\,(A-\mu^2)\left(\frac{\alpha^2\,(A,-A)}{(A-\mu^2)(A,-\mu^2)}\right)\right.$$
$$\left.+\,(2\,A_{,,}-3\,A,)(A,-A)\,\alpha^2\beta\gamma\right]M$$
$$=\left[A\alpha\gamma\,(A_{,,}-\mu^2)\,(A,-\mu^2)\left(\frac{\beta^2\,(A-A,)}{(A-\mu^2)(A,-\mu^2)}\right)\right.$$
$$\left.+\,(2\,A_{,,}-3\,A)\,(A-A,)\,\alpha\beta^2\gamma\right]N,$$

woraus durch Reduction:

$$0=\left[A,\alpha\,\frac{1}{A,-\mu^2}+\frac{(2\,A_{,,}-3\,A,)\,\alpha}{A_{,,}-\mu^2}\right]M$$
$$+\left[A\beta\,\frac{1}{A-\mu^2}+\frac{(2\,A_{,,}-3\,A)\beta}{A_{,,}-\mu^2}\right]N,$$

oder:

$$0=A,\alpha\,\frac{A_{,,}-A,}{A,-\mu^2}\left(1+\frac{2\,(A,-\mu^2)}{A,}\right)M$$
$$+A\beta\,\frac{A_{,,}-A}{A-\mu^2}\left(1+\frac{2\,(A-\mu^2)}{A}\right)N. \quad \text{(XXIV)}$$

Aus der zweiten der Gleichungen (A) erhält man: [448]

$$[A,\beta\gamma(\alpha^2\,(A-\mu^2)+\beta^2\,(A_{,,}-\mu^2)+\gamma^2\,(A-\mu^2))$$
$$+\,(2\,A-3\,A,)\,(A,-A_{,,})\,\alpha^2\beta\gamma]M$$
$$=[A_{,,}\alpha\beta(\alpha^2\,(A-\mu^2)+\beta^2\,(A,-\mu^2)+\gamma^2\,(A-\mu^2))$$
$$-\,(2\,A-3\,A_{,,})\,(A,-A_{,,})\,\alpha\beta\gamma^2]P.$$

Durch Verbindung mit (XXII) verwandelt diese sich in:

$$\left[A,\beta\gamma\,(A-\mu^2)\,(A_{,,}-\mu^2)\left(\frac{\alpha^2\,(A,-A_{,,})}{(A,-\mu^2)\,(A_{,,}-\mu^2)}\right)\right.$$
$$\left.+\,(2\,A-3\,A,)\,(A,-A_{,,})\,\alpha^2\,\beta\,\gamma\right]M$$
$$=\left[A_{,,}\,\alpha\beta\,(A-\mu^2)\,(A,-\mu^2)\left(\frac{\gamma^2\,(A_{,,}-A,)}{(A_{,,}-\mu^2)\,(A,-\mu^2)}\right)\right.$$
$$\left.+\,(2\,A-3\,A_{,,})\,(A_{,,}-A,)\,\alpha\,\beta\,\gamma^2\right]P,$$

oder, gehörig reducirt, in:

$$0 = \left(A,\alpha\frac{A-A,}{A,-\mu^2} + 2\alpha(A-A,)\right)M + \left[A_{,,}\gamma\frac{A-A_{,,}}{A_{,,}-\mu^2} + 2\gamma(A-A_{,,})\right]P. \quad \text{(XXV)}$$

Vergleicht man die Gleichungen (XXIV) und (XXV), wodurch $\frac{N}{M}$ und $\frac{P}{M}$ bestimmt sind, mit den Gleichungen (6), wodurch $\frac{Y}{X}$ und $\frac{Z}{X}$ bestimmt sind, und erinnert sich, dass $\mu^2 = \varrho^2$, so sieht man ein, dass der Unterschied der Grössen $\frac{N}{M}$ und $\frac{P}{M}$ von $\frac{Y}{X}$ und $\frac{Z}{X}$ nur sehr klein ist, nämlich proportional dem Unterschiede der Grössen A, $A,$, $A,,$; dass also sehr nahe die durch M, N, P bestimmte Richtung der Schwingung zusammenfällt mit der durch X, Y, Z bestimmten Richtung, d. i. sehr nahe senkrecht steht auf der Normale der Wellenebene und demjenigen Radiusvector des Durchschnitts der Wellenebene mit der Fläche (XXIII), wodurch ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit angegeben ist[21]).

Nach § 5 geschehen die Bewegungen in den dreierlei Wellenebenen immer in drei auf einander senkrechten [**449**] Richtungen, und deshalb und zufolge des eben Bewiesenen müssen die Bewegungen der Wellenebene, deren Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch (XX) gegeben ist, sehr nahe senkrecht auf der Wellenebene stattfinden.

§ 9.

Auf diese Weise sind also die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung, in sofern sich diese auf die Richtung der gebrochenen Strahlen[12]) beziehen, übereinstimmend mit denjenigen, die *Fresnel* aus seiner Theorie abgeleitet und der Erfahrung entsprechend gefunden hat, streng mit Hülfe der Mechanik deducirt aus den anziehenden und abstossenden Kräften, welche, der Verschiebung und Zusammendrückung der Medien sich widersetzend, nur in sehr kleiner Entfernung wirksam sind. Diejenigen theoretischen Betrachtungen, welche *Fresnel* zu diesen Gesetzen geführt haben, werden immer als das Bewunderungswürdigste und Scharfsinnigste seines eminenten Genies dastehen; aber ich glaube nicht, dass sie die-

jenige Evidenz in sich tragen, dass jede strengere theoretische Untersuchung dadurch überflüssig geworden wäre. Ich sage: die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung sind im Vorhergehenden aus den Gleichungen (I) abgeleitet; in der That, man darf nur die Lichtwellen als diejenigen der drei im Vorhergehenden gefundenen Wellen, in welche sich die ursprüngliche Wellenebene im allgemeinsten Falle immer theilt, definiren, deren Schwingungen parallel der Wellenebene sind; aus dem Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dieser ebenen Wellen lässt sich die Gestalt der Wellenfläche [22]) ableiten, die entsteht, wenn von einem einzelnen Erschütterungspunkt sich nach allen Richtungen die Vibration fortpflanzt. Es ist dies ein Problem der Theorie der Enveloppen (*Fresnel*, Theorie der doppelten Strahlenbrechung), wie in § 1 gesagt ist. Die Kenntniss dieser Wellenfläche führt auf die Gesetze der Geschwindigkeit, womit die Strahlen, d. i. [450] Radii vectores der Wellenfläche in verschiedenen Richtungen sich bewegen, die nicht identisch sind mit den Geschwindigkeiten, womit die Wellenebenen, die auf diesen Strahlen senkrecht stehen, sich fortpflanzen würden. Aus den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Strahlen in den verschiedenen Richtungen lassen sich die Richtungen derselben, sei es, dass sie von einem zweiten Medium reflectirt oder gebrochen werden, finden — in beiden Fällen zeigt die Theorie der Interferenzen, in Verbindung mit dem *Huygens*'schen Princip, dass die Richtung des reflectirten oder gebrochenen Strahls in irgend einem Punkt in einiger Entfernung von der reflectirenden oder brechenden Fläche diejenige Richtung ist, in welcher die vibrirenden Impulse zuerst nach diesem Punkt hingebracht werden; die Bestimmung der Lage des reflectirten oder gebrochenen Strahls ist also ein Problem der Theorie der Maxima und Minima. Die particulären Fälle, wo das Medium zu einem viergliedrigen Krystallsystem gehört, oder aus der Abtheilung der sechsgliedrigen oder der regulären Systeme ist, lassen sich aus demjenigen, was für den allgemeinen Fall der zwei-und-zweigliedrigen krystallinischen Medien entwickelt ist, leicht ableiten, wenn man Rücksicht nimmt auf die Relationen, die zwischen den Constanten, nach § 2, für diese Fälle stattfinden. Es ergiebt sich hieraus das vollkommen gleiche Verhalten in der Fortpflanzung der Wellen in den viergliedrigen und sechsgliedrigen Systemen, wie es auch die Erfahrung bestätigt; es ergiebt sich ferner, dass die Fortpflanzung der

Wellen, und somit die Strahlenbrechung in den krystallinischen Medien vom regulären Krystallsystem sich genau so verhält, wie in den unkrystallinischen Medien, gleichfalls congruent mit der Erfahrung.

Die entwickelte Theorie erklärt nicht allein die Richtungen der doppelt gebrochenen oder doppelt reflectirten Strahlen; sie zeigt auch ihr Verhalten in Hinsicht der Polarisation.

[**451**] Sie zeigt zuerst, dass in einem Medium, welches die Natur der festen Körper hat, d. h. welches nicht allein der Zusammendrückung widersteht, sondern auch der Verschiebung in sich, immer Wellenflächen erregt werden, in welchen die Theilchen parallel mit diesen Wellenflächen ihre Schwingungen machen, während aus den hydrodynamischen Gleichungen, welche auf die Voraussetzung der freien Verschiebbarkeit basirt sind, nur Schwingungen senkrecht auf den Wellenflächen sich ergeben. Dieses Resultat ist hervorzuheben, da grosse Zweifel von einem berühmten Mathematiker, sich stützend auf diese hydrodynamischen Gleichungen, erhoben wurden, als *Fresnel* zuerst, um das Verhalten des polarisirten Lichtes in den Interferenz-Erscheinungen zu erklären, die Definition einer Lichtwelle aufstellte: dass ihre Schwingungen parallel der Wellenfläche stattfänden. Die Existenz solcher Wellen in Medien von der Natur fester Körper hat aber auch derselbe grosse Mathematiker zuerst theoretisch bewiesen (*Poisson, Mém. de l'Acad. T. X*)[11]).

Um die im Vorhergehenden entwickelte Theorie in Hinsicht der Polarisation der Wellen oder der Strahlen in vollkommener Uebereinstimmung mit den *Biot*'schen Gesetzen für diese Erscheinung zu finden, muss man von der Polarisationsebene die Definition geben: dass sie die durch den Strahl und durch die Richtung der Schwingungen gelegte Ebene sei; diese Definition vorausgesetzt, hat in den optisch einaxigen Kystallen der nach dem Hauptschnitt polarisirte Strahl immer eine constante Geschwindigkeit, welches auch seine Neigung gegen die Axe ist[23]); bei den optisch zweiaxigen Krystallen hat der in einem der drei Hauptschnitte sich bewegende Strahl, dessen Polarisationsebene mit diesem Hauptschnitt zusammenfällt, immer dieselbe Geschwindigkeit, welches auch seine Richtung in diesem Hauptschnitt sei. Die *Biot*'sche Construction für die Lage der Polarisationsebenen, wenn der Strahl nicht in einem der drei Hauptschnitte [**452**] liegt, lässt

sich aus der obigen Theorie ableiten (confr. *Fresnel*, Theorie der doppelten Strahlenbrechung).

Aber mit dieser Definition der Polarisationsebene hört die Uebereinstimmung der hier entwickelten Theorie mit der *Fresnel*'schen Theorie auf. Bei *Fresnel* ist die Polarisationsebene diejenige durch den Strahl gelegte Ebene, gegen welche die Richtung der Schwingungen senkrecht steht. Dieser Umstand ist nicht allein, weil er mit dem, was *Fresnel* gesagt hat, in Widerspruch steht, wichtig, er ist es auch in seinen Folgen. Die *Fresnel*'sche Definition der Polarisationsebene hat ihren Grund in seinem Theorem, wonach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aller ebenen Wellenflächen, die eine Richtung gemeinschaftlich haben, dieselbe ist, wenn die Schwingungen nach dieser gemeinschaftlichen Richtung geschehen; oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Wellenfläche ist nur von der Richtung der Schwingungen abhängig. Nach vorstehender Theorie muss die in der Wellenebene senkrecht gegen die Richtung der Schwingung stehende Linie immer dieselbe Richtung haben, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenebenen immer dieselbe sein soll; dies ist eine strenge Folgerung aus den der Theorie zu Grunde liegenden Gleichungen (I). Den theoretischen Beweis, den *Fresnel* für sein Theorem gegeben hat, kann man, glaube ich, wenigstens nicht für vollkommen evident halten; der Beweis seines Theorems durch Erfahrung, worauf sich *Fresnel* bezieht (Theorie der doppelten Strahlenbrechung, *Poggendorff*'s Annalen, Bd. XXIII, S. 427), kann, glaube ich, mit demselben Recht für das Resultat unserer Theorie in Anspruch genommen werden. Es scheint nämlich durch directe Erfahrungen dieser directe Widerspruch nicht entschieden werden zu können, die Beobachtungen über die doppelte Strahlenbrechung sind eben so gut übereinstimmend mit der hier entwickelten [453] Theorie als mit der *Fresnel*'schen[24]). Aber *Fresnel* hat seine Definition von der Polarisationsebene den theoretischen Untersuchungen über Intensität des reflectirten Lichtes, welches vor der Reflexion nach einer beliebigen Richtung polarisirt war, zum Grunde gelegt (*Fresnel*, über das Gesetz der Modification etc., *Poggend.* Annalen, Bd. XXII, p. 90); die Formeln für die reflectirten Lichtmengen und für die Drehungen, welche die ursprünglichen Polarisationsebenen durch Reflexion erleiden, sind durch vielfache spätere Erfahrungen (*Brewster*; *Poggend.* Ann. Bd. XIX;

und *Seebeck*, ebendaselbst, Bd. XXII) bestätigt, so dass ihre Richtigkeit als durch die Erfahrung erwiesen betrachtet werden kann. Für die theoretischen Betrachtungen aber, welche zu diesen Formeln geführt haben, ist es nicht mehr gleichgültig, welche der beiden in Rede stehenden Definitionen von der Polarisationsebene man annimmt; diese theoretischen Betrachtungen gründen sich wesentlich auf die *Fresnel*'sche Definition. Man muss annehmen, entweder, dass eine strenge theoretische Untersuchung der Gesetze über die Quantität des reflectirten Lichtes auf Grund der Gleichungen (I) zu denselben Formeln führt, als diejenigen, welche *Fresnel* aus theoretischen Betrachtungen, die mit den Gleichungen (I) in Widerspruch stehen, abgeleitet hat, oder dass die Gleichungen (I) nicht die Theorie der Lichtundulationen enthalten, das heisst, dass diese Art von Undulationen nicht, oder nicht allein hervorgebracht werden von denjenigen Kräften der Elasticität, die sich durch die Veränderung der relativen Entfernung der Theilchen entwickeln.

Unsere Theorie zeigt, dass im Allgemeinen, ausser den beiden polarisirten Wellenebenen, noch eine dritte erregt wird, welche nur unter besonderen Bedingungen der ursprünglichen Verrückungen oder der ursprünglich erregten Geschwindigkeiten verschwinden kann, nämlich wenn diese von der Art sind, dass dadurch keine Verdichtung [454] oder Verdünnung des Mediums hervorgebracht ist. Die beiden Klassen von Wellen unterscheiden sich nämlich ausser der Richtung, in welchen ihre Theilchen schwingen, noch darin, dass für die ersteren, die polarisirten, immer

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ist[25]), d. i., dass in ihnen keine Verdichtung und Verdünnung des Mediums stattfindet, nur Verschiebung des Mediums in sich; wogegen in der dritten Welle dieser Ausdruck einen endlichen, der Geschwindigkeit nahe proportionalen Werth hat, wenn nicht im anfänglich erregten Zustand derselbe $= 0$ war, d. h. die Verrückung und die Geschwindigkeit von der Art, dass ihre Componente senkrecht auf der Wellenebene $= 0$ war[26]).

Wenn obige Theorie der Natur entsprechend ist, so muss man annehmen, dass dieses dritte Wellensystem, wenn es nicht als Licht wahrgenommen werden kann, sich auf irgend

eine andere Weise, als vorhanden, wird wahrnehmen lassen, sei es als strahlende Wärme, oder chemisch wirkend, oder als irgend ein anderes Agens. Wenn die Gesetze der Reflexion, d. h. die Modification, welche die Richtungen und Intensitäten der Schwingungen dadurch erleiden, aus obiger Theorie werden abgeleitet sein, werden sich die einfachsten Wege, dieses dritte Wellensystem aufzusuchen, angeben lassen.

Anmerkungen.

Franz Ernst Neumann, am 11. September 1798 zu Joachimsthal in der Uckermark als Sohn eines Landmanns geboren, wurde von seinem neunten Jahre an in Berlin erzogen und besuchte dort das Werder'sche Gymnasium. Er verliess, noch nicht 17 Jahre alt, dasselbe, um, von glühendem Patriotismus getrieben, an dem Feldzuge des Jahres 1815 als freiwilliger Jäger theilzunehmen. In der Schlacht bei Ligny schwer verwundet, kehrte er nach längerem Siechthum in die Heimath und auf das Gymnasium zurück, studirte dann von 1817 bis 1819 in Berlin und Jena Theologie, wandte sich aber 1819 unter dem Einfluss von *Weiss* in Berlin dem Studium der Mineralogie zu; daneben trieb er privatim Mathematik und Physik. Die Durchführung dieser Studien, zu denen ihn seine Neigung gezogen hatte, war ihm nicht leicht, da er von allen Mitteln entblösst war und sein Leben nur aufs kümmerlichste fristen konnte; doch mit bewundernswerther Energie überwand er alle Hindernisse. Bald lenkten seine neue Projectionsmethode der Krystalle (1823) und seine Untersuchungen über das Zonengesetz (1826) die Aufmerksamkeit weiterer Kreise auf ihn. Er siedelte im Herbst 1826 als Docent nach Königsberg i. Pr. über, wurde dort 1828 ausserordentlicher, 1829 ordentlicher Professor der Mineralogie und später auch der Physik. In letzterer Stellung blieb er bis zum Jahre 1876, wo er von der Verpflichtung zum Halten von Vorlesungen entbunden wurde. Er starb am 23. Mai 1895 zu Königsberg, fast 97 Jahre alt.

Neumann's erste wissenschaftliche Leistungen lagen auf dem Gebiete der geometrischen Krystallographie; daneben suchte er die physikalischen Eigenschaften der Krystalle, insbesondere ihr elastisches, optisches und thermisches Verhalten zu erforschen. Diese Studien bildeten den Ausgangspunkt

seiner epochemachenden Arbeiten auf dem Gebiete der theoretischen Physik. Insbesondere sind es die theoretische Optik und die Elektrodynamik (vgl. Heft 10 und 36 der Klassiker), an deren Ausbildung und Erweiterung er in hervorragendem Maasse theilgenommen hat. Daneben verdanken ihm andere Theile der Physik, namentlich die Lehre von der Elasticität und Capillarität sowie die Wärmelehre und die Theorie des Magnetismus, erhebliche Bereicherungen in theoretischer und experimenteller Hinsicht. Auch in der reinen Mathematik war er thätig; 1826 veröffentlichte er in der Isis eine geometrische Abhandlung, später hat er in verschiedenen Aufsätzen die Theorie der Kugelfunctionen wesentlich gefördert. Aber nicht nur durch seine Arbeiten hat er der Wissenschaft gedient, auch als Lehrer hat er ganz Hervorragendes geleistet. Seine alle Theile der theoretischen Physik umfassenden Vorlesungen, die ersten und lange Zeit die einzigen ihrer Art, wenigstens in Deutschland, haben ihm mehr als drei Jahrzehnte lang zahlreiche Schüler zum Theil aus weiter Ferne zugeführt, und in seiner Schule ist eine Reihe bedeutender Physiker und Mathematiker vorgebildet.

Die hier abgedruckte Arbeit ist die erste, welche *Neumann* auf dem Gebiete der theoretischen Physik veröffentlicht hat; sie war neben den gleichzeitigen Arbeiten *Cauchy*'s von der grössten Bedeutung für die Entwickelung der Optik. Die Lichttheorie war um das Jahr 1820 durch *Fresnel* (1788—1827; seine gesammelten Werke sind 1866—1870 in drei Bänden zu Paris erschienen) in ganz neue Bahnen gelenkt. Durch den Nachweis, dass das Wesen des Lichtes in der Ausbreitung transversal schwingender Wellen zu suchen sei, hatte er die Emissionstheorie definitiv beseitigt und die Undulationstheorie auf eine feste, unanfechtbare Basis gestellt. Weiter hatte *Fresnel* die Doppelbrechung in Krystallen studirt und hier durch Induction gewisse Gesetze gefunden, für die er dann eine theoretische Ableitung zu geben suchte. Führte diese Theorie auch zu Resultaten, die völlig mit der Erfahrung in Uebereinstimmung waren, so lagen derselben doch gewisse Hypothesen zu Grunde, die einer strengeren Kritik gegenüber nicht als gerechtfertigt erscheinen konnten. Es blieb daher die Aufgabe zu lösen, die Gesetze der Doppelbrechung streng deductiv aus mechanischen Principien abzuleiten; und diese

Aufgabe ist von *Neumann* in der vorliegenden Arbeit gelöst. Gleichzeitig mit *Neumann* hatte *Cauchy* dieselbe Aufgabe in Angriff genommen, und er hatte die Resultate, zu denen er gelangt war, ohne Ableitung in den Mémoires der Pariser Akademie, Band X. (der Band ist 1831 erschienen), veröffentlicht. Diese Resultate decken sich zum Theil mit denen *Neumann*'s. Das führt *Neumann* selbst in folgender, seiner Abhandlung vorausgeschickten Bemerkung an:

»Die in dieser Abhandlung enthaltenen theoretischen Resultate müssen auf Priorität resigniren, da ich in Tom. X der Mémoir. de l'Acad. aus einer Inhaltsangabe einer Abhandlung, welche *Cauchy* der Pariser Akademie vorgelegt hat, ersehen habe, dass in dieser Abhandlung, ausser anderen, dieselben Resultate bereits enthalten sind. Ich würde meine Abhandlung ganz unterdrückt haben, wenn ich nicht glaubte, dass die in ihr angewandte einfache, ich möchte sagen elementare Behandlung eines sehr schwierigen Problems auch dann noch von Interesse sein wird, wenn die ohne Zweifel eine viel gelehrtere und allgemeinere Analyse desselben Problems enthaltende Abhandlung von *Cauchy* selbst im Druck erschienen sein wird.«

Muss man hiernach auch *Cauchy* hinsichtlich eines Theils der Resultate die Priorität zugestehen, so ist doch hervorzuheben, dass *Neumann*'s Untersuchung einen durchaus selbständigen Charakter trägt und unabhängig von der *Cauchy*'s entstanden ist. *Cauchy* geht, wie sich aus dem Theil seiner Rechnungen ergiebt, den er in Band V seiner Exercices veröffentlicht hat, von viel complicirteren Grundgleichungen aus und hat zudem sein Hauptinteresse der mathematischen Seite der Frage zugewandt; während *Neumann* wesentlich die physikalische Seite des Problems ins Auge fasst und daher seine Rechnungen so elementar und einfach wie möglich zu gestalten sucht. Die grosse Eleganz und Klarheit der Darstellung verleiht *Neumann*'s Arbeit, abgesehen von der Bedeutung, die sie für die Entwickelung der Optik gehabt hat, einen hohen Werth.

Neumann setzt die Kenntniss der *Fresnel*'schen Gesetze der Doppelbrechung voraus; doch ist die Arbeit auch ohne vorheriges Studium von *Fresnel*'s Abhandlungen verständlich, da das zum Verständniss Nothwendige überall angeführt ist.

Der vorliegende Abdruck hält sich streng an das Original; nur sind in der Schreibweise der Formeln geringe Aenderungen vorgenommen, so insbesondere in der Bezeichnung der partiellen Ableitungen. Ferner ist die veraltete Schreibweise

einiger Wörter geändert (z. B. seyn in sein etc.). Endlich sind Druckfehler in verschiedenen Formeln verbessert.

Specielle Noten zum Text.

1) *(S. 3.)* Ueber das *Huygens*'sche Princip und dessen Anwendung zur Erklärung der Spiegelung und Brechung der Lichtstrahlen vgl. Heft 20 der Klassiker. Eine verallgemeinerte Form hat *Kirchhoff* diesem Princip gegeben (Monatsberichte der Berliner Akademie 1882).

2) *(S. 7.)* Als durch *Fresnel* festgestellt war, dass das Wesen des Lichtes in transversalen Schwingungen bestehe, kannte man von analogen Bewegungen nur die fester elastischer Körper. Es lag daher nahe, dem Lichtäther die charakteristischen Eigenschaften solcher Körper beizulegen; und so wurden die Differentialgleichungen der Elasticität die Grundlage für die Erklärung der Lichterscheinungen. Die Berechtigung dieser Hypothese ist von *Neumann* im Anfang des § 2 (S. 6 des Textes) eingehend erörtert. Der Begründer dieser Anschauung war *Fresnel*, der aber noch keine Theorie der Elasticität vorfand, an die er anknüpfen konnte. Erst *Fresnel*'s optische Untersuchungen gaben den Anstoss zum Ausbau der Elasticitätstheorie. Die Grundgleichungen dieser Theorie wurden, soweit es sich um unkrystallinische Medien handelte, zuerst im Jahre 1824 von *Navier* entwickelt (vgl. S. 6 des Textes). An *Navier* knüpft *Neumann* an und dehnt dessen Resultate auf solche krystallinische Medien aus, die in Bezug auf drei rechtwinklige Ebenen symmetrisch sind. Die Aufstellung dieser elastischen Gleichungen für Krystalle ist eines der wesentlichsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit. Die Ableitung der Gleichungen theilt *Neumann* hier nicht mit, sondern verweist hinsichtlich derselben auf *Navier* und giebt nur an, wie *Navier*'s Betrachtungen zu modificiren sind. Zum vollen Verständniss des Folgendem erscheint es zweckmässig, den Weg, auf dem man zu den Gleichungen (I) gelangt, kurz zu skizziren.

Man suche zunächst die Resultante der Kräfte, welche auf ein Theilchen M, das im Ruhezustand die Coordinaten x, y, z hat, von den übrigen Theilchen ausgeübt werden. Ein zweites Theilchen M, habe im Ruhezustand die Coordinaten $x + \varrho \cos a$, $y + \varrho \cos b$, $z + \varrho \cos c$, wo ϱ die Entfernung

beider Theilchen, a, b, c die Winkel bezeichnen, welche ϱ mit den Axen bildet. Nachdem eine Verrückung des Mediums eingetreten ist, seien die Coordinaten von M: $x+u$, $y+v$, $z+w$, die von M_1: $x+\varrho\cos a+u_1$, $y+\varrho\cos b+v_1$, $z+\varrho\cos c+w_1$. Die Entfernung beider Theilchen, die vorher $=\varrho$ war, hat sich durch die Verrückung um $\Delta\varrho$ geändert, und zwar ist

$$1)\qquad \varrho+\Delta\varrho=\sqrt{(\varrho\cos a+u_1-u)^2+(\varrho\cos b+v_1-v)^2+(\varrho\cos c+w_1-w)^2}.$$

Für die Wirkung auf M kommen nur solche Theilchen M_1 in Betracht, die M sehr nahe liegen; für solche können die Grössen

$$u_1-u=\Delta u,\quad v_1-v=\Delta v,\quad w_1-w=\Delta w$$

nur sehr kleine Grössen gegen ϱ sein, da kein Zerreissen des Mediums eintreten soll. Man kann daher die Quadratwurzel in 1) nach Potenzen von Δu, Δv, Δw entwickeln und die Quadrate der letztgenannten Grössen vernachlässigen, wodurch man erhält:

$$1')\qquad \Delta\varrho=\Delta u\,.\cos a+\Delta v\,.\cos b+\Delta w\,.\cos c\,.$$

Die Kraft, welche M_1 auf M ausübt, ist nun

$$MM_1F\,.f(\varrho)\Delta\varrho\,,$$

und da die Richtung dieser Kraft die der Verbindungslinie von M mit M_1 ist, so ist die x-Componente derselben:

$$MM_1\frac{\varrho\cos a+\Delta u}{\varrho+\Delta\varrho}\Delta\varrho f(\varrho)F.$$

Um die x-Componente $M\mathfrak{A}$ der auf M ausgeübten Gesammtwirkung zu erhalten, ist über alle Theilchen M_1 zu summiren. Dabei ist zu beachten, dass $f(\varrho)$ nur für sehr kleine ϱ von Null verschieden, dass aber $\Delta\varrho$ klein gegen ϱ ist. Man kann daher die Quadrate von $\Delta\varrho$, wie die Producte $\Delta u\,\Delta\varrho$ etc. gegen die ersten Potenzen dieser Grössen vernachlässigen und erhält mit Berücksichtigung von 1'):

$$2)\quad M\mathfrak{A}=M\sum{}'M_1\cos a(\Delta u.\cos a+\Delta v.\cos b+\Delta w.\cos c)f(\varrho)F.$$

Aus dem schon angeführten Grunde müssen nun u, v, w continuirliche Functionen des Ortes sein. Mithin ist u_1 dieselbe Function von $x+\varrho\cos a$, $y+\varrho\cos b$, $z+\varrho\cos c$,

die u von x, y, z ist. Entwickelt man diese Function nach dem *Taylor*'schen Satze nach Potenzen der kleinen Grösse ϱ, so ergiebt sich:

$$3)\quad \Delta u = u_{,} - u = \varrho\left(\cos a\frac{\partial u}{\partial x} + \cos b\frac{\partial u}{\partial y} + \cos c\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\varrho^2}{2!}\left(\cos^2 a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos^2 b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos^2 c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\cos a\cos b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right.$$
$$\left. + 2\cos a\cos c\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + 2\cos b\cos c\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right) + \cdots$$

Den Ausdruck 3) und die analogen für Δv, Δw hat man in 2) einzusetzen, wobei man wegen der Kleinheit von ϱ Glieder von der Ordnung ϱ^3 vernachlässigen kann. Weiter ist zu beachten, dass die Factoren $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots$, die für alle $M_{,}$ denselben Werth haben, vor das Summenzeichen gestellt werden können, und dass von den Summen, mit denen die genannten Factoren multiplicirt sind, in Folge der Symmetrie des Mediums in Bezug auf drei Ebenen, die parallel den Coordinatenebenen durch das Theilchen M gelegt sind, diejenigen verschwinden, die ungerade Potenzen von $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ enthalten, z. B.:

$$\sum M_{,}\cos^3 a\,\varrho f(\varrho) F = 0\,,\quad \sum M_{,}\cos^2 a\cos b\,\varrho f(\varrho) F = 0\,,$$
$$\sum M_{,}\cos^3 a\cos b\,\varrho^2 f(\varrho) F = 0 \text{ etc.}$$

Dadurch ergiebt sich, falls E die Dichtigkeit des Mediums ist:

$$4)\quad EA = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} D + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} A_{,,} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} A + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} A_{,,} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} A,$$

wo

$$D = \tfrac{1}{2} E\sum M_{,}\cos^4 a\,\varrho^2 f(\varrho) F,$$
$$5)\qquad A_{,,} = \tfrac{1}{2} E\sum M_{,}\cos^2 a\cos^2 b\,\varrho^2 f(\varrho) F,$$
$$A = \tfrac{1}{2} E\sum M_{,}\cos^2 a\cos^2 c\,\varrho^2 f(\varrho) F$$

ist.

Wirkt nun auf das Theilchen M eine äussere Kraft, deren x-Componente $= X$ ist, so ist zum Gleichgewicht erforderlich:

$$MA + X = 0 \text{ etc.}$$

Die Gleichungen der Bewegung werden also

$$MA + X - M\frac{\partial^2(x+u)}{\partial t^2} = 0 \text{ etc.}$$

Seiner Bedeutung nach ist aber x von t unabhängig. Nimmt man an, dass keine äusseren Kräfte wirken, so geht die letzte Gleichung, falls man noch durch das Volumen von M dividirt, in folgende über:

6) $$E\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA,$$

eine Gleichung, die, wenn man für EA den Ausdruck 4) setzt, mit der ersten Gleichung (I) [S. 8 des Textes] identisch wird. Aehnlich ergeben sich die beiden andern Gleichungen (I).

Es bleibt noch übrig, die Ausdrücke 5) umzuformen. Dazu denke man sich um einen Punkt des Theilchens M eine Kugel mit dem Radius 1 beschrieben, nenne dm ein Oberflächenelement derselben und summire zunächst über alle M_i innerhalb des über dm liegenden, bis zum Kugelmittelpunkte reichenden Kegels, d. h. über alle M_i, welche dieselben Werthe von a, b, c besitzen, hinterher über alle Elemente dm, d. h. hinterher integrire man über die Kugelfläche. Bezeichnet man die für festgehaltene Werthe von a, b, c gebildete Summe

$$\tfrac{1}{2}E\sum M_i \varrho^2 f(\varrho)$$

mit $p\,dm$, so gehen die Ausdrücke 5) unmittelbar in die entsprechenden Ausdrücke (II) [Seite 9 des Textes] über. — Darin, dass der Factor p als von a, b, c unabhängig angenommen ist, liegt keine Einschränkung der Allgemeinheit. Denn man braucht den etwa von a, b, c abhängigen Theil von p ja nur mit der Function F vereinigt denken. — Für unkrystallinische Medien ist F constant; man kann daher die Integration über die Kugelfläche ausführen und erhält die S. 9 unter 1) angegebenen Resultate. —

Gegen *Navier*'s Ableitung der Gleichungen der Elasticität lassen sich verschiedene Bedenken geltend machen. Die der Theorie zu Grunde liegende Annahme, dass die Wirkung zweier Theilchen auf einander der Aenderung ihrer Entfernung proportional ist, ist willkürlich und ihre Zulässigkeit zweifelhaft. Ferner führt diese Theorie nicht zur Kenntniss der Bedingungen, welche an der Grenze zweier elastischen Medien zu erfüllen sind. Von diesen Bedenken ist die Ableitung frei,

die *Poisson* von jenen Gleichungen zunächst für unkrystallinische Medien gegeben (Mém. de l'Acad. de Paris, T. VIII; Journal de l'École polyt., Cah. 20, 1831) und später auf Krystalle übertragen hat, ebenso die Ableitung von *Cauchy* (Exercices de Math. T. III, IV, 1828, 1829). Dass sich *Neumann* an *Navier* angeschlossen hat, hat darin seinen Grund, dass *Navier* der erste war, der die in Rede stehenden Gleichungen aufgestellt hat, dass ferner der von *Navier* eingeschlagene Weg am einfachsten zum Ziele führt, und dass endlich für das hier zu behandelnde Problem die Grenzgleichungen nicht gebraucht werden. — Ueber andere Begründungen der Elasticitätstheorie vgl. *Neumann*'s Vorlesungen über diese Theorie, herausgegeben von *O. E. Meyer*, Leipzig 1885, wie auch *Kirchhoff*'s Mechanik.

3) *(S. 8.)* Der Aufsatz, auf den *Neumann* hier verweist, ist in *Poggendorff*'s Annalen Band 31 veröffentlicht (»Ueber das Elasticitätsmaass krystallinischer Substanzen etc.«). Ueber die Doppelbrechung des Lichtes in comprimirten unkrystallinischen Substanzen hat *Neumann* eine grössere Abhandlung in den Abhandlungen der Berliner Akademie 1841 publicirt.

4) *(S. 10.)* Die hier angeführten Formeln ergeben sich folgendermaassen. Eine beliebige Linie l bilde mit den rechtwinkligen Axen α, β, γ die Winkel a, b, c; die Linie $\alpha_,$ bildet mit denselben Axen die Winkel 60°, 30°, 90°. Daher gilt für den Winkel $a_,$ zwischen l und $\alpha_,$ die Gleichung:

$$\cos a_, = \cos 60 \,.\, \cos a + \cos 30 \cos b + \cos 90 \,.\, \cos c\,,$$

d. h.:

$$\cos a_, = \tfrac{1}{2} \cos a + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cos b\,.$$

Ebenso ist

$$\cos a_{,,} = -\tfrac{1}{2} \cos a + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cos b\,,$$

und durch Addition und Subtraction folgen hieraus sofort die Gleichungen des Textes. —

Seine Untersuchungen über die Form der Elasticitätsgleichungen für hemiëdrische Krystalle hat *Neumann* nicht veröffentlicht; doch hat er das Problem der Lichtbewegung in solchen in seinen Vorlesungen behandelt, z. B. im Winter 1864—1865.

5) *(S. 11.)* Zwischen den beiden Gleichungen des Textes stehen im Original noch die Gleichungen $x = \alpha\varrho$, $y = \beta\varrho$,

$z = \gamma\varrho$. Diese sind hier fortgelassen, da sie nicht für beliebige Punkte der Ebene gelten, wie die Gleichung $\varrho = \alpha x + \beta y + \gamma z$.

6) *(S. 12.)* Streng genommen, fehlt hier der Nachweis, dass die cubische Gleichung (V) für m^2 stets drei positive Wurzeln hat. Dass dem so ist, ergeben die folgenden Betrachtungen [vgl. Anmerkung 9)]. —

In den Gleichungen (VI) fehlen im Original die Indices an den Buchstaben N, P.

7) *(S. 13.)* In den Zeilen 5 und 6 haben ν, und ω, denselben Werth, da sie nur von $m,^2$ abhängen. Dem Factor M, könnte man in beiden Reihen verschiedene Werthe beilegen; indessen ist das nicht erforderlich, da M, in beiden Reihen mit verschiedenen willkürlichen Functionen multiplicirt ist.

8) *(S. 18* u. *27.)* Es wäre vielleicht zweckmässig gewesen, die in den Gleichungen (e) auftretenden Maximal-, resp. Minimalwerthe von R (d. h. die Axen des Ellipsoids) von beliebigen Werthen von R auch in der Bezeichnung zu unterscheiden.

Eine ähnliche Unterscheidung in der Bezeichnung wäre auch S. 27 zweckmässig.

9) *(S. 19.)* Die gesperrt gedruckten Zeilen geben nur einen Theil des vorher abgeleiteten Resultats wieder. Hinzuzufügen ist, dass jede der Halbaxen des Ellipsoids zugleich den reciproken Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für diejenige Welle darstellt, in der die Bewegung der Theilchen dieser Axe parallel erfolgt. Das Ellipsoid (XIV), dessen Hauptaxen allein von den Elasticitätsconstanten des Mediums sowie von der Lage der ursprünglichen Erschütterungsebene abhängen, führt den Namen »Fortpflanzungsellipsoid«.

Dass die Fläche (XIV) wirklich ein Ellipsoid ist, ergiebt sich folgendermaassen. Ein beliebiger vom Mittelpunkte ausgehender Radius r der Fläche habe die Richtungscosinus $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, so ist:

$$\frac{1}{r^2} = (D\alpha^2 + A_{,,}\beta^2 + A\gamma^2)\mathfrak{m}^2 + (A_{,,}\alpha^2 + C\beta^2 + A_{,}\gamma^2)\mathfrak{n}^2 + (A\alpha^2 + A_{,}\beta^2 + B\gamma^2)\mathfrak{p}^2 + 4A_{,,}\alpha\beta\mathfrak{m}\mathfrak{n} + 4A\alpha\gamma\mathfrak{m}\mathfrak{p} + 4A_{,}\beta\gamma\mathfrak{n}\mathfrak{p}.$$

Führt man für A, $A_{,}$, $A_{,,}$, B, C, D ihre Werthe aus den Gleichungen (II) [S. 9] ein und vereinigt die Summe der Integrale zu einem Integral, so kann man in letzterem die zu

integrirende Function in eine Summe von Quadraten umformen und erhält:

$$\frac{1}{r^2} = p\int dm\, F\cdot\{(\alpha\mathfrak{m}\cos^2 a + \beta\mathfrak{n}\cos^2 b + \gamma\mathfrak{p}\cos^2 c)^2 + (\beta\mathfrak{m} + \alpha\mathfrak{n})^2\cos^2 a\cos^2 b + (\gamma\mathfrak{m} + \alpha\mathfrak{p})^2\cos^2 a\cos^2 c + (\beta\mathfrak{p} + \gamma\mathfrak{n})^2\cos^2 b\cos^2 c\}.$$

Hieraus folgt, dass, falls p und F positiv sind, $\frac{1}{r^2}$ stets positiv ist, d. h. dass alle vom Mittelpunkte ausgehenden Radien die Fläche treffen. Fläche (XIV) kann mithin nur ein Ellipsoid sein. Weiter ergiebt sich, dass, da die Wurzeln der cubischen Gleichung (V) für m^2 den reciproken Quadraten der Axen von (XIV) proportional sind, jene Gleichung stets drei positive reelle Wurzeln hat.

10) *(S. 19.)* Um die Gleichung (XIV^a) auf die Hauptaxen zu transformiren, führe man ein neues rechtwinkliges Axensystem ξ, η, ζ ein, dessen Axe ξ auf der Wellenebene senkrecht steht; dann ist

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

also geht (XIV^a) über in:

$$3\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{A}.$$

11) *(S. 20* u. *33.)* In der citirten Arbeit, die den Titel führt: »Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques«, wird zuerst die allgemeinste Schallbewegung in der Luft erörtert, sodann werden die allgemeinen Lösungen der elastischen Gleichungen für unkrystallinische Medien aufgesucht; dieselben ergeben sich zunächst in Form von sechsfachen Integralen, die sich aber auf Doppelintegrale, resp. dreifache Integrale reduciren lassen. Aus diesen Ausdrücken folgt, dass aus einer beliebigen Erschütterung, die ursprünglich nur einen kleinen Raum einnahm, zwei Wellen entstehen, eine longitudinale und eine transversale, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sich wie $\sqrt{3} : 1$ verhalten. — *Poisson*, der früher die Möglichkeit transversaler Schwingungen bestritten hatte, zeigt in jener Abhandlung also, dass das, was im Text für ebene Wellen bewiesen ist, allgemein gilt.

12) *(S. 21* u. ff.*)* Zu dem an dieser Stelle zum ersten Male

benutzten Ausdruck »Strahl« ist Folgendes zu bemerken. Bei der Fortpflanzung des Lichts in krystallinischen Medien ist zwischen Wellennormale und Strahl, welche Begriffe bei unkrystallinischen Medien zusammenfallen, zu unterscheiden. *Neumann* hebt dies späterhin auch ausdrücklich hervor (cfr. S. 32 des Textes, wo der Begriff Strahl definirt ist). In der vorliegenden Arbeit ist eigentlich von Strahlen keine Rede, sondern es handelt sich um Wellennormalen und deren Geschwindigkeit. Für die S. 21 betrachteten Wellen fallen allerdings die Strahlen mit den Wellennormalen zusammen, nicht aber für die weiterhin (S. 22, 23, 31) besprochenen.

13) *(S. 21.)* An dieser Stelle steht im Original irrthümlich a und $a_{,,}$ statt $a_{,,}$ und a.

14) *(S. 22.)* Dass die Gleichung 1) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der nach x polarisirten Welle darstellt, ergiebt sich aus der Gleichung (XIV) des Fortpflanzungsellipsoids. In dieser Gleichung verschwinden für $\alpha = 0$ die Producte xy und xz; die Axe x fällt daher mit einer Hauptaxe des Ellipsoids zusammen, und $A_{,,}\beta^2 + A\gamma^2$ ist das reciproke Quadrat dieser Hauptaxe, also nach S. 18 gleich dem Werthe von Em^2 für die nach dieser Hauptaxe schwingende Welle.

15) *(S. 22, 23.)* Das Zerfallen der Gleichung 2) in zwei Factoren kann man als Bedingung dafür bezeichnen, dass sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden in 2) enthaltenen Wellen rational durch die Richtungscosinus der Wellennormale ausdrücken. Eine zweite Möglichkeit für jenes Zerfallen würde $A, = 0$ sein; diese ist aber wegen der Bedeutung von $A,$ ausgeschlossen. — Uebrigens sind in den beiden ersten Zeilen von Seite 23 wie in Gleichung 4) die Buchstaben B und C im Original irrthümlicher Weise vertauscht.

Dass die Schwingungsrichtung der Welle mit constanter Geschwindigkeit im Hauptschnitt liegt, folgt sofort aus dem Satze S. 18, 19, da die Welle, deren Geschwindigkeit durch 1) bestimmt ist, ihre Schwingungen parallel x ausführt. Es ist aber nicht ohne weiteres ersichtlich, welche von den beiden Wellen 3) und 4) eine transversale, welche eine longitudinale ist. Um das zu entscheiden, muss man zu den Gleichungen (IV) [S. 12] zurückgehen. Setzt man in diesen $\alpha = 0$ und $Em^2 = A_{,,}$ so folgt aus der ersten $M = 0$, während die beiden anderen mit Rücksicht auf (XV) denselben Werth von $\frac{N}{P}$

ergeben. Damit hat man unmittelbar die Richtungscosinus für die Schwingungsrichtung der in Rede stehenden Welle; aus diesen findet man den Winkel ϑ zwischen der Schwingungsrichtung und der Wellennormale, und zwar wird

$$\cos\vartheta = \frac{\beta\gamma(\sqrt{C-A_1} - \sqrt{B-A_1})}{\sqrt{(B-A_1)\gamma^2 + (C-A_1)\beta^2}}.$$

Sind, wie im Folgenden (§ 6) stets angenommen wird, $C-A_1$ und $B-A_1$ nur wenig von einander verschieden, so ist $\cos\vartheta$ nahe $= 0$, ϑ nahe $= 90^\circ$, d. h. die Schwingung ist nahezu transversal, ein Resultat, das mit dem allgemeinen, später in § 8 abgeleiteten, übereinstimmt.

16) *(S. 23.)* Zur Erläuterung des hier Gesagten ist hervorzuheben, dass das Bestehen der Relationen (XV) und (XVI für sich allein noch nicht genügt, um aus (V) die *Fresnel*'sche Construction herzuleiten, dass letzteres vielmehr nur gelingt, wenn man mit jenen Relationen die Gleichung (XVII) [S. 25] verbindet [(XVIII) ist eine Folge von (XV), (XVI), (XVII)]. Die Gleichungen (XV), (XVI), (XVII) können aber, wie eine genauere Untersuchung lehrt, nur dann gleichzeitig bestehen, wenn zwei der Grössen B, C, D und ebenso die entsprechenden zwei der Grössen A, A_1, A_2 einander gleich sind, z. B. $B = C$ und $A = A_2$ (vgl. darüber den Aufsatz von *Beltrami*: »Sulla teoria delle onde« in den Rendiconti des Istituto Lombardo, 1886). Diese Einschränkung vermeidet *Neumann* dadurch, dass er die Grössen B, C, D und ebenso A, A_1, A_2 als einander nahezu gleich annimmt, so dass man die Quadrate ihrer Differenzen vernachlässigen kann. Bei einer solchen Vernachlässigung ergiebt sich (XVII) als Folge von XV) und (XVI), und die Einschränkung $B = C$ etc. ist jetzt nicht erforderlich. Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Annahme, die Constanten B, C, D und ebenso A, A_1, A_2 seien einander nahezu gleich, für das Folgende wesentlich ist; nur durch Hinzufügung der erwähnten Annahme zu den Relationen (XV) und (XVI) folgt aus (V) die *Fresnel*'sche Construction.

17) *(S. 24.)* An Stelle der Buchstaben $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ des Textes stehen im Original lateinische Buchstaben. Die Aenderung erschien zweckmässig, um nicht verschiedene Grössen mit denselben Buchstaben zu bezeichnen. — Die Ausdrücke (B) erhält man leicht, wenn man dm, $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$

durch sphärische Coordinaten ausdrückt und die Integration ausführt.

18) *(S. 25.)* Die linken Seiten der Gleichungen

$$A - A_{,} = \Delta_{,,}, \quad A_{,,} - A = \Delta_{,}, \quad A_{,} - A_{,,} = \Delta$$

haben im Original das entgegengesetzte Zeichen. Die Aenderung war nöthig, um jene Gleichungen mit den Gleichungen (a) in Uebereinstimmung zu bringen.

Um die Gleichung (b) aus den Gleichungen (a) abzuleiten, muss man nicht nur die Quadrate der Grössen Δ, $\Delta_{,}$, $\Delta_{,,}$ vernachlässigen, sondern auch die Producte

$$\Delta_{,}(c - d) = \Delta_{,}(C - D - \Delta) \text{ etc.}$$

Uebrigens mag bemerkt werden, dass es der Rechnungen auf S. 25 nicht bedurft hätte. Aus den Gleichungen (B) [S. 24] folgen unmittelbar die Gleichungen (XIX), und ebenso (XVII) und (XVIII), falls man die mit $\lambda^2 L$ und λ^3 multiplicirten Glieder vernachlässigt. — Will man die Gleichungen (B) nicht benutzen, so lässt sich die Rechnung einfacher gestalten, wenn man $C - B = \delta$, $D - B = \delta$, setzt, dann aus (XV) und (XVI) A, $A_{,}$, $A_{,,}$ mit Vernachlässigung von δ^2, $\delta_{,}^2$ berechnet; dadurch erhält man zunächst die Gleichungen (XIX) und mit derselben Näherung (XVII) und (XVIII).

19) *(S. 26.)* Die ersten Ausdrücke für M, N, P ergeben sich direct aus (V), wenn man die Multiplicationen ausführt. Um weiter von der ersten Formel für M zur zweiten zu gelangen, bedarf es keiner Annahme über die Constanten B, C, D etc. Dagegen folgt der zweite Werth von N aus dem ersten nur durch Benutzung der Relationen (XV) und (XVI), vermöge deren $BC - 3A_{,}^2 = (B + C)A$, etc. ist. — Um endlich von dem ersten Werthe von P zu dem zweiten zu gelangen, bedarf man neben den Relationen (XV) und (XVI) noch der Gleichungen (XVII) und (XVIII). Setzt man nämlich in dem ersten Ausdruck für P: $D\alpha^4 = D\alpha^2 - D\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2)$ etc., setzt ferner für $BC - 3A_{,}^2$ seinen Werth aus (XV) etc. und reducirt, so kommt zunächst:

$$P = (D\alpha^2 + C\beta^2 + B\gamma^2)(AA_{,,}\alpha^2 + A_{,}A_{,,}\beta^2 + AA_{,}\gamma^2)$$
$$+ \alpha^2\beta^2\gamma^2\{BCD - DA_{,}(A + A_{,,}) - CA(A_{,,} + A_{,}) - BA_{,,}(A + A_{,})$$
$$- 3DA_{,}^2 - 3CA^2 - 3BA_{,,}^2 + 18AA_{,}A_{,,}\}.$$

In dem Factor von $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ setze man noch nach (XV)